

MAT120: 论证 第12讲讲义

二项实验

上一讲中，我们学习了条件概率和决策树，并开始计算抛硬币时的结果个数。这一讲中，我们将建立下一个重要工具：二项试验。我们会看到，为什么当你把一个只有两种结果的试验重复很多次时，帕斯卡三角形和组合数 $C_{n,r}$ 会自然出现。我们也会把这件事和二项分布，以及更一般的概率分布概念联系起来。学完这一讲之后，我们就能够在许多现实中的“统计成功次数”问题里使用二项思想。

1 引言

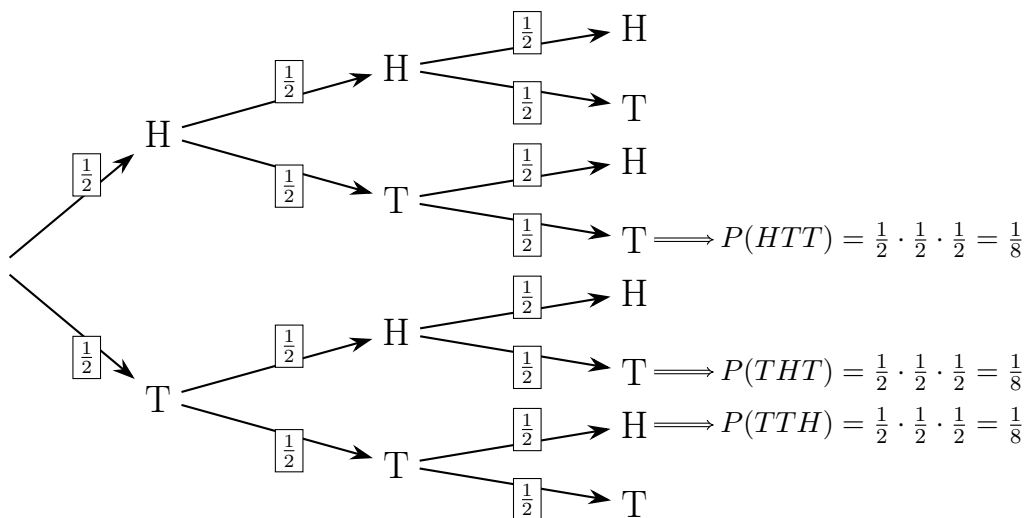
1.1 计算3次抛掷中恰好有2次反面的概率

上一讲中，我们研究了多次抛硬币所对应的概率。在这个过程中，我们注意到，当我们试图计算3次抛硬币中可能出现多少个反面时，会浮现出某种结构。对于像3这样的小数字，我们可以直接把所有可能结果写出来：

- 抛一次硬币有2个结果： H 或 T 。
- 抛两次硬币有4个结果： HH, HT, TH, TT 。
- 抛三次硬币有8个结果（也就是完整的样本空间）：

$$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

如果我们想计算像 $P(\text{恰好有2个T})$ 这样的概率，那么可以用几种方式来做。一种方法是使用决策树（如第12讲中那样），去计算每一个有利结果的概率：



然后我们只需把这些单个结果的概率加起来，就能得到这个复合事件的概率。这三个结果是互斥的，因此它们的概率可以直接相加：

$$P(\text{恰好有2个T}) = P(HTT \text{ 或 } THT \text{ 或 } TTH) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

另一种方法是使用更简单的复合事件计算思路（如第11讲中那样）得到同样的答案。我们可以注意到，在这个情形里，所有结果都是等可能的，所以也可以使用公式：

$$P(\text{事件}) = \frac{\text{有利于该事件的结果个数}}{\text{结果总数}}.$$

在这里，恰好包含两个反面的结果有3个，即 HTT 、 THT 和 TTH ，因此：

$$P(\text{恰好有2个T}) = \frac{\text{恰好有2个T的结果个数}}{\text{结果总数}} = \frac{3}{8}.$$

1.2 这个问题的一般解法

如果我们现在抛硬币 n 次，那么样本空间就会有 2^n 个结果。为了求“恰好有 r 次反面”的概率，我们要计算：

$$\frac{\text{恰好有 } r \text{ 次反面的结果个数}}{2^n}.$$

因此，只要我们能够数出在 n 次抛硬币中恰好有 r 次反面的结果个数，这个问题就解决了。

一种理解方式是这样的：我们把 n 次抛硬币的结果写成一个由H和T构成的字符串，例如，5次抛硬币的一个结果可能是 $HHTHT$ 。在真正抛硬币之前，我们可以把这些位置想象成完全空白、尚未指定的槽位。例如，当 $n = 5$ 时，可以把潜在结果看成 $_ , _ , _ , _ , _$ 。现在，要求恰好有 r 次反面，就等价于问：有多少种方法可以把这 r 个槽位指定为T。一旦我们选定了哪 r 个位置是T，那么其余所有位置就都被迫是H，因此每一种对T位置的选择都对应着唯一的一个结果。不同的槽位选择会给出不同的结果。于是，在总共 n 个可用槽位中，我们必须选出其中 r 个来放置T。换句话说，我们有 n 个可选位置，而必须恰好选定其中 r 个。这恰好就是一个组合问题，也就是说，我们是在从 n 个抛掷位置中选出一个含有 r 个元素的子集，因此不同选择的总数正是由公式 $C_{n,r}$ 来计数的。

在上一讲中，我们看到，在 n 次抛掷中得到 r 次反面的方式数，可以直接从帕斯卡三角形中读出来。¹ 回忆如下：

[illegible]

假设我们把硬币抛5次。恰好得到2次反面的概率是多少？

解答

总结果数为 $2^5 = 32$ 。恰好有2次反面的结果个数是 $C_{5,2} = 10$ （帕斯卡三角形第5行）。因此，

$$P(\text{恰好有2次反面}) = \frac{C_{5,2}}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

¹ 更具体地说，我们看到，答案可以通过找到第 n 行（从第 0 行开始计数），再在这一行中找到对应 r 的位置（从 $r = 0$ 开始计数）来获得。这个数就是 $C_{n,r}$ ，也就是我们想要的数量。

2 二项试验

2.1 例1：公平硬币抛10 次

假设我们有一枚公平硬币，并连续抛掷它10 次。恰好得到5 次反面的概率是多少？

解答

根据上一节，我们可以用下面的公式来计算 $P(\text{恰好有5 次反面})$ ：

$$P(\text{恰好有5 次反面}) = \frac{C_{10,5}}{2^{10}}.$$

当然，我们也可以使用通常的公式 $C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ，但为了叙述上的连贯性，这里我们仍然使用帕斯卡三角形。三角形的第10 行是：

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

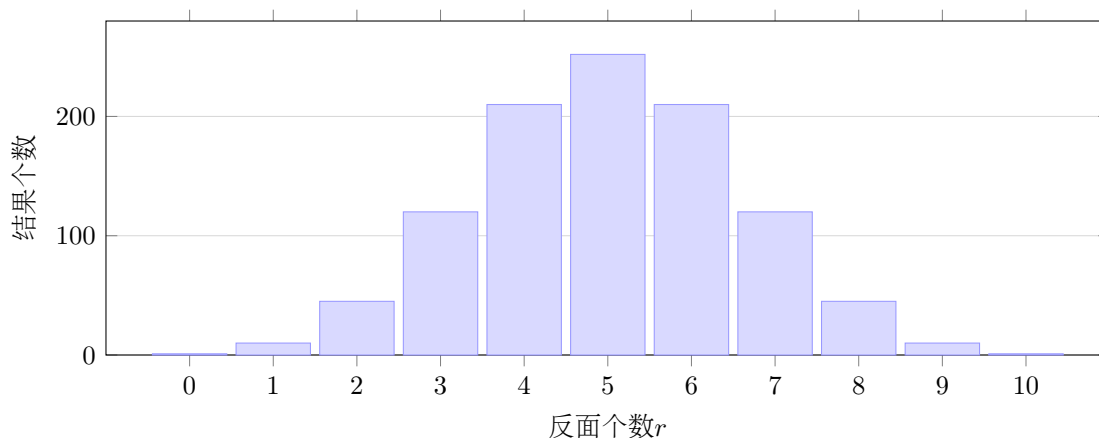
于是，我们移动到其中 $r = 5$ 的那一项（记得三角形是从0 开始计数的），就看到 $C_{10,5} = 252$ 。总结果数为 $2^{10} = 1024$ 。因此：

$$P(5 \text{ 次反面}) = \frac{C_{10,5}}{2^{10}} = \frac{252}{1024} \approx 0.246 \approx 24.6\%.$$

现在我们来进一步探索10 次抛硬币的样本空间结构。根据上面的计算，我们知道这个样本空间共有1024 个元素。这些结果从 $HHHHHHHHHH$ 一直到 $TTTTTTTTTT$ ，以及其间的一切情形。理解这样一个庞大样本空间的一种自然方式，是根据每个结果中包含多少个反面来对它们进行分组。² 一个有帮助的方式，是按照它们所含的反面个数来整理这些结果。根据帕斯卡三角形的第10 行，包含1024 个结果的样本空间可以组织如下：

反面个数 r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
结果个数	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

上表可以画成如下柱状图：



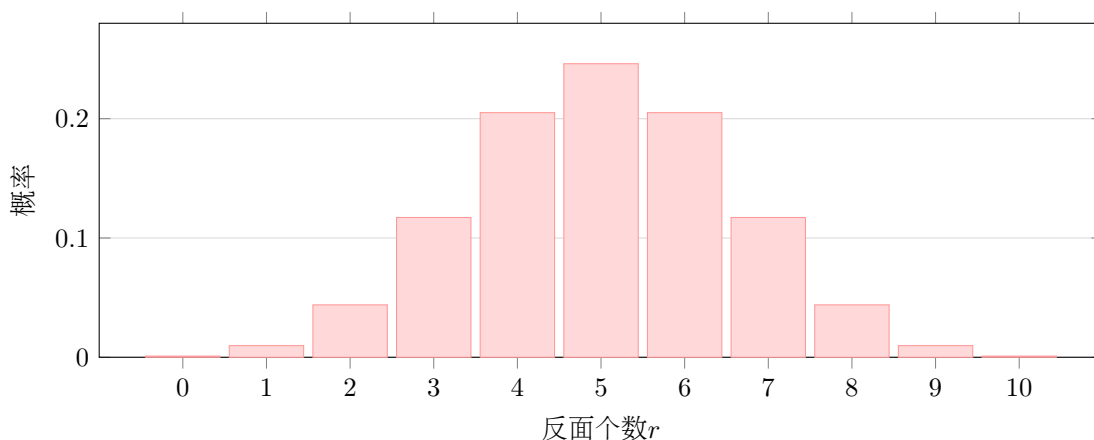
²当然，我们也可以改用正面来分组。但因为我们一直都在用反面来叙述，所以这里保持一致。

这里， x 轴表示一个离散计数，也就是反面的可能个数。 y 轴则表示与之对应的结果个数。因此，从某种意义上说，这张图只是帕斯卡三角形第10行的一种可视化。

根据上面的讨论，我们知道，这个系统中的概率可以通过把 $C_{10,r}$ 除以 $2^{10} = 1024$ 来计算。因此，我们可以先做这个除法，再把结果画出来，从而观察在这个系统中，概率本身是如何分布在各个结果之中的。

r 次反面	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
概率 (分数)	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$
约化为百分数	0.1%	1.0%	4.4%	11.7%	20.5%	24.6%	20.5%	11.7%	4.4%	1.0%	0.1%

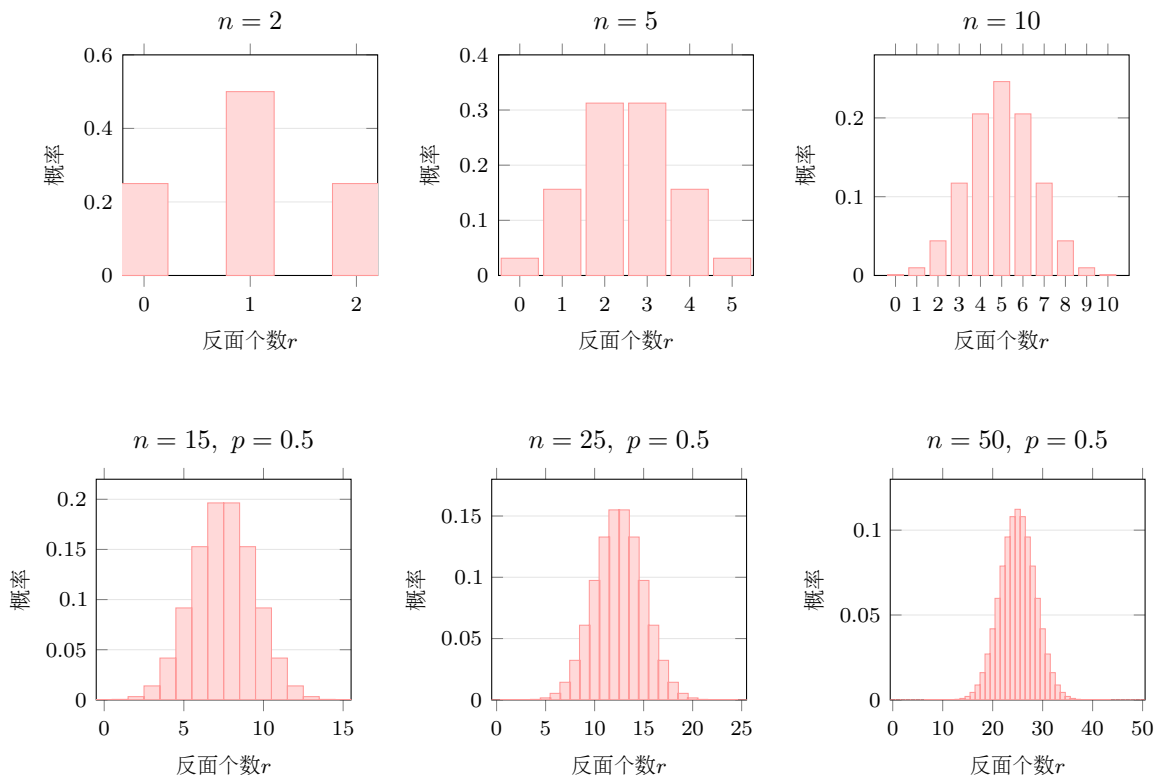
注意到我们之前得到的24.6% 这个数值。利用上表，我们可以把这个概率分布画出来：



注意，这个图形的形状与前面那个柱状图完全相同。唯一变化的只是 y 轴的尺度。这个特殊的图有一个名字：它叫作二项分布。

2.2 其他 n 值对应的二项分布

一般而言，我们可以针对其他的 n 值，也就是抛硬币的总次数，构造对应的二项分布。这些图形会描绘出，在大量大量可能结果中，概率究竟是怎样分布的。它们的形状来自帕斯卡三角形的第 n 行，而把这些数除以 2^n 之后，它们就变成了概率。总体来说，如果我们继续不断增加抛硬币次数，也就是让 n 增大，那么 r 的可能取值就会更多，而分布会变得更平滑，并且更加集中在中间位置（靠近 $r = n/2$ ）。关于这种“平滑性”，我们将在第15讲中详细讨论。



2.3 例2：抛一枚不公平的硬币

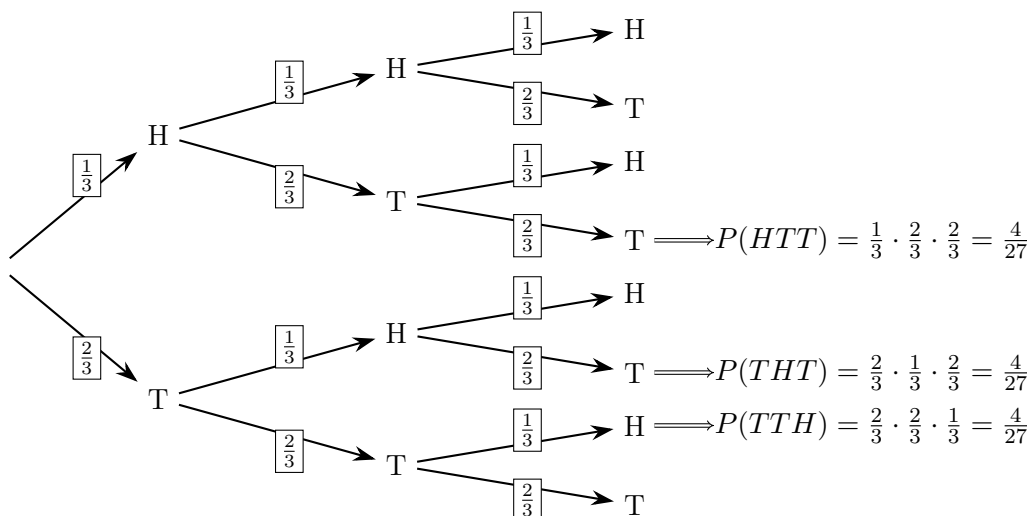
现在假设我们有一枚经过某种方式动过手脚的硬币，使得它落在正面或反面的概率不再相等。³ 假设这枚“不公平”硬币满足：

$$P(H) = \frac{1}{3}, \quad P(T) = \frac{2}{3}.$$

问题：恰好得到2次反面的概率是多少？

在上面讨论的公平硬币情形中，所有8个结果都是等可能的，因此我们只要把有利结果数出来（共有3个），再除以8即可。但是，对于这枚不公平硬币来说，所有结果并不等可能。因此，我们不能只靠数有利结果再除以8。相反，我们可以使用决策树的方法。可能结果的空间和之前相同，只不过现在树上每条分支的概率发生了变化：

³说起来，我并不完全确定现实中该如何做到这一点，但我怀疑可以把硬币稍微掰弯，让它不再完全平整，比如变成拱形：⌒。这大概会使它变得不公平，因为一侧的表面积更大。



恰好有2次反面对应于结果 HTT 、 THT 、 TTH 。这些事件彼此互斥，因此我们要求的概率可以通过求和得到：

$$P(\text{恰好有2次反面}) = P(HTT \text{ 或 } THT \text{ 或 } TTH) = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{12}{27}.$$

注意，每一个这样的结果的概率计算方式其实完全相同：要计算 $P(HTT)$ 、 $P(THT)$ 或 $P(TTH)$ ，我们只需把两个 $P(T) = \frac{2}{3}$ 和一个 $P(H) = \frac{1}{3}$ 相乘即可。事实上，这种计算风格可以推广到更一般的情形。对于 n 次抛掷，我们有：

$$P(r \text{ 个 } T) = C_{n,r} \left(\frac{2}{3}\right)^r \left(\frac{1}{3}\right)^{n-r}.$$

更一般地说，如果我们把落在反面或正面的概率调整成其他数值，那么 n 次抛掷中恰好有 r 次反面的概率就可以由下面的公式计算：

$$P(n \text{ 次抛掷中有 } r \text{ 个 } T) = C_{n,r} (P(T))^r (P(H))^{n-r}.$$

这里， $(P(T))^r (P(H))^{n-r}$ 表示某一个特定排列中，恰好有 r 个T和 $(n-r)$ 个H的概率，而 $C_{n,r}$ 则计算所有不同排列的数量。

3 一般理论

3.1 随机变量

如果变量 X 在某个试验或观察中所取得的值，是由随机结果决定的，那么这个变量 X 就叫作随机变量。随机变量主要有两类：

- 离散随机变量只能取有限个值，或者可数个值。
- 连续随机变量可以在某个区间中取无穷多个值。

练习：离散还是连续？

把下列每个随机变量分类为离散型或连续型。

- (a) 某位被选中的学生完成秋季学期注册所花费的时间。
- (b) 某位被选中的学生在随机选择的一天中收到的短信条数。
- (c) 一辆电动车在满电状态下能够行驶的英里数。
- (d) 在某个选区中随机抽取50名已登记选民，统计其中在上一次郡选举中投票的人数。

解答

- (a) 连续型。
- (b) 离散型。
- (c) 连续型。
- (d) 离散型。

3.2 概率分布

概率分布是指，把概率分配给离散随机变量的每一个不同取值，或者分配给连续随机变量的每一个取值区间。

对于抛硬币10次的试验，随机变量 X 用来计数反面的个数 r 。它会随机地取下列集合中的值：

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10\}.$$

更一般地，随机变量 X 表示 n 次抛掷中反面的个数，它在二项分布中正好出现在 x 轴上。

概率分布本质上就是一张柱状图，它满足：

- 随机变量 X 的可能取值画在 x 轴上，
- 每个可能取值所对应的概率画在 y 轴上。

3.3 二项试验的定义

在第2节中，我们看到了两种不同的抛硬币版本：一种是公平的，另一种则是“不公平的”，即两种可能结果具有不同概率。事实上，这两者都是一种更一般过程的例子，这种过程叫作二项试验。二项试验有四个重要的定义特征。

定义：二项试验

二项试验具有以下性质：

- (B1) 试验次数是固定的，记作 n 。
- (B2) 这 n 次试验彼此独立，并且在相同条件下重复进行。
- (B3) 每一次试验都只有两种结果：成功（ S ）和失败（ F ）。
- (B4) 每次试验中，成功的概率都相同，记作 p ，失败的概率记作 q 。由于每次试验不是成功就是失败，所以 $p + q = 1$ ，因此 $q = 1 - p$ 。

换句话说，二项试验是一种多步骤试验，其中每一步都只有两种可能结果。在二项试验中，核心问题是：求在 n 次试验中恰好出现 r 次成功的概率。假设(B2)用来简化这些相继概率的计算。

3.3.1 例：公平硬币抛掷

在上一节的第一个例子中：

- (B1) n 是抛硬币的次数。
- (B2) 各次抛掷彼此独立。事实上，它们与之前试验的结果完全无关（甚至在物理意义上也是如此）。
- (B3) 我们把“得到反面”定义为成功，把“没有得到反面”定义为失败。
- (B4) 对于公平硬币， $p = P(T) = 0.5$ ，且 $q = 0.5$ 。

对于求与这个试验相关的概率这一核心问题，我们前面的讨论其实已经在做这件事。我们已经看到，对于公平硬币，有

$$P(n \text{ 次抛掷中得到 } r \text{ 次反面}) = \frac{C_{n,r}}{2^n}.$$

对于不公平硬币，二项结构本质上是一样的，只不过我们把概率调整成了 $p = \frac{2}{3}$ 和 $q = \frac{1}{3}$ 。前面我们已经看到，不同 r 值所对应的概率可以由下面的公式计算：

$$P(r \text{ 个 } T) = C_{n,r} \left(\frac{2}{3}\right)^r \left(\frac{1}{3}\right)^{n-r} = C_{n,r} \cdot P(T)^r \cdot P(H)^{n-r}.$$

3.4 二项概率的一般公式

二项概率的一般公式

对于参数为 n 、 p 、 $q = 1 - p$ 的二项试验，恰好得到 r 次成功的概率是

$$P(n \text{ 次试验中有 } r \text{ 次成功}) = C_{n,r} p^r q^{n-r}.$$

这里：

- (1) p^r 表示在某一个特定顺序中成功出现 r 次的概率。
- (2) q^{n-r} 表示在同一个特定顺序中失败出现 $(n - r)$ 次的概率。
- (3) $p^r q^{n-r}$ 表示某一个特定序列的概率，其中这个序列包含 r 次成功和 $(n - r)$ 次失败。
- (4) $C_{n,r}$ 计算一共有多少个不同的序列具有 r 次成功和 $(n - r)$ 次失败。

3.5 p 会如何影响分布？

一般来说，我们可以使用公式

$$P(n \text{ 次试验中有 } r \text{ 次成功}) = C_{n,r} p^r q^{n-r}$$

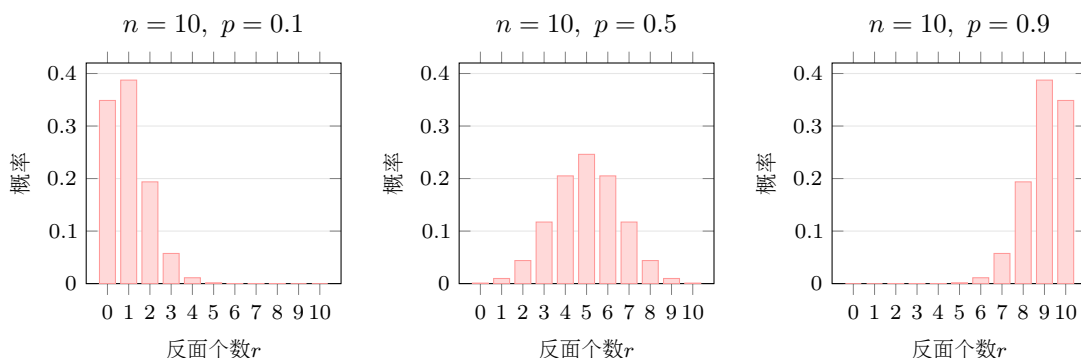
来描述每一个二项试验所对应的二项分布。简单来说：我们把随机变量的可能取值（从0 到 n ）放在 x 轴上，把上面这个公式输出的值放在 y 轴上。

对于公平硬币，成功概率 $p = 0.5$ ，它恰好与 q 相等。这会使得对应的二项分布完全对称。你可以在第2 节中的图形里看到这一点。如果我们把成功概率从 $p = 0.5$ 调整开来，那么这个分布就会失去对称性。

为了说明这一点，假设我们研究的是一个有 $n = 10$ 次试验的二项试验。当 $p = 0.5$ 时，对应分布就是第2.1 节中的图形。下面我们简单讨论一下，如果把 p 调大或调小，会发生什么。

- 如果 p 接近0，比如 $p = 0.1$ ，那么每一次试验得到成功结果的机会就低得多。因此，在10 次试验中得到7, 8, 9 或10 次成功的可能性就极低。更有可能的是，在10 次尝试里只得到1 次或2 次成功。因此，这样一个系统所对应的二项分布，会把大部分概率分布在 x 轴的左侧，也就是更靠近0, 1, 2 这些数值的位置。
- 如果 p 接近1，比如 $p = 0.9$ ，那么每次试验得到成功就会变得非常可能。因此，在10 次尝试中只得到一两次成功反而会非常倒霉，你更可能得到大约7, 8, 9 或10 次成功。从二项分布的角度看，如此高的成功概率会把整个分布推向右侧，使得大部分概率集中在 x 轴上靠近8, 9, 10 的区域。

下面的图展示了当 $n = 10$ ，成功概率分别为0.1、0.5 和0.9 时，真正的二项分布是什么样子。



3.6 例：轮盘赌

假设我们班里有22 名学生。你努力学习，几年后终于成功从LUJ 毕业。O'Connell 博士为你感到非常骄傲，于是决定带你们大家一起去赌场玩轮盘。



轮盘上有36个编号槽位，再加上绿色槽位，一共是37个可能结果。O'Connell 博士向你提出如下条件：

如果球落在绿色槽位上，你得到\$50,000；如果出现任何其他结果，你得到\$0。

我们要回答的主要问题是：

练习

恰好有3名学生获胜的概率是多少？

为了解决这个问题，我们将使用第3.4节中提到的一般二项公式。不过，在开始计算之前，我们必须先确认：这个情形本身是否真的是一个二项试验。

- B1：共有22名学生，每个人都试一次轮盘，因此共有 $n = 22$ 次试验。
- B2：假设轮盘是公平的，那么这些试验彼此确实独立。
- B3：每一次试验只有两个可能结果：

成功 = 落在绿色上， 失败 = 落在其他位置。

- B4：轮盘上的每个槽位都等可能成为结果。由于轮盘上一共有37个槽位，而其中只有一个绿色槽位，因此成功和失败的概率为：

$$p = P(\text{成功}) = \frac{1}{37}, \quad q = P(\text{失败}) = 1 - p = \frac{36}{37}.$$

现在我们已经确认，这个系统确实可以被看作一个二项试验，于是就可以解答主要问题了。

解答

我们使用二项公式:

$$P(n \text{ 次试验中有 } r \text{ 次成功}) = C_{n,r} p^r q^{n-r}.$$

在这里, $n = 22$, 因为有22 名学生; $r = 3$; $p = \frac{1}{37}$; $q = \frac{36}{37}$ 。把这些值代入公式, 我们得到:

$$P(\text{恰好3 次获胜}) = C_{22,3} \left(\frac{1}{37}\right)^3 \left(\frac{36}{37}\right)^{19} = \frac{22!}{3! \cdot 19!} \left(\frac{1}{37}\right)^3 \left(\frac{36}{37}\right)^{19}.$$

数值上, 这大约等于

$$P(\text{恰好3 次获胜}) \approx 0.018 \approx 1.8\%.$$

从另一种角度来解释这个概率: 我们进行了22 次独立试验, 并希望其中有3 次成功、19 次失败。其中一个代表这种情形的具体结果可能是:

$$S, S, S, F, F, \dots, F,$$

也就是说, 前3 名学生成功, 而后面19 名学生全部失败。根据假设(B2), 所有这些试验彼此独立。因此, 与这个具体结果对应的概率可以通过把每一个结果的概率相乘来得到。我们有:

$$P(S \text{ 然后 } S \text{ 然后 } S \text{ 然后 } F \text{ 然后 } \dots \text{ 然后 } F) = \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \dots \cdot \frac{36}{37},$$

这和写成 $p^3 q^{19}$ 是同一回事。这是计算某一个特定结果, 即包含3 次成功和19 次失败的一个具体序列的公式。但在22 次试验中, 放置这3 次成功的方式一共有 $C_{22,3}$ 种。这些序列彼此互斥, 所以我们将它们的概率加起来, 于是得到 $C_{22,3} p^3 q^{19}$ 。

$$P(\text{恰好3 次获胜}) = \underbrace{p^3 q^{19} + p^3 q^{19} + \dots + p^3 q^{19}}_{C_{22,3} \text{ 次}} = C_{22,3} \cdot p^3 q^{19},$$

这就和前面的公式完全一样。

4 练习

4.1 练习1: 掷骰子

假设你把一枚标准的6 面骰子掷三次。

我们把“掷出6”视为“成功”。于是每次掷骰子都只有两个结果（是6 或不是6），各次掷骰子彼此独立，并且成功概率恒定:

$$n = 3, \quad p = P(\text{掷出6}) = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}.$$

问题

恰好得到两个6 的概率是多少?

解答

要恰好得到两个6，我们需要在 $n = 3$ 次试验中有 $r = 2$ 次成功。二项公式给出

$$P(r \text{ 次成功}) = C_{n,r} p^r q^{n-r}.$$

所以

$$P(\text{恰好两个6}) = C_{3,2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) = 3 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72} \approx 6.9\%.$$

从叙述上理解：在三次掷骰子中，选出其中哪两次是6的方式共有 $C_{3,2} = 3$ 种，而每一种这样的模式的概率都是 $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)$ 。

4.2 练习2：篮球猫

一只猫在投篮罚球。猫并不擅长打篮球，所以假设一球投进的概率是 $p = 0.5$ 。这只猫一共投6球。

我们把“投进”视为“成功”。于是：

$$n = 6, \quad p = 0.5, \quad q = 0.5.$$

问题

- (a) 这只猫恰好投进4球的概率是多少？
- (b) 这只猫至少投进4球的概率是多少？

解答

设 X 为投进的球数。

- (a) 恰好投进4球意味着在 $n = 6$ 次试验中有 $r = 4$ 次成功：

$$P(X = 4) = C_{6,4} (0.5)^4 (0.5)^2 = C_{6,4} (0.5)^6 = \frac{C_{6,4}}{64} = \frac{15}{64} \approx 23.4\%.$$

- (b) “至少4球”意味着投进4球、5球或6球，所以我们把这些彼此互斥的情况加起来：

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\ &= \frac{C_{6,4}}{64} + \frac{C_{6,5}}{64} + \frac{C_{6,6}}{64} = \frac{15 + 6 + 1}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32} \approx 34.4\%. \end{aligned}$$