

MAT120: 论证 第7讲讲义

线性模型

今天我们将开始下一个主题：数学建模。建模的思想是，我们可以用数学来描述现实世界中的各种事物。这些描述永远只是近似，但通常已经“足够好”，可以带来帮助和洞见。今天我们将探索最简单的数学模型，也就是线性模型。顾名思义，这些模型使用直线来模拟具有恒定变化的系统。我们将先探索直线的数学，然后再解决一些小问题。

1 线性方程

1.1 线性方程

线性方程是最简单的一类代数方程。一个关于变量 x 的线性方程，是指可以写成如下标准形式的方程：

$$mx + b = 0.$$

这里，字母 m 和 b 是固定的数，而 x 是变量（也就是说，它可以取许多不同的值）。我们还假设 m 非零，因为否则方程就会变成 $b = 0$ ，这并不是特别有趣。

下面是一些标准形式的线性方程例子：

(1) $2x = 0$ 这里 $m = 2$ 且 $b = 0$ 。

(2) $x - 7 = 0$ 这里 $m = 1$ 且 $b = -7$ 。

(3) $4x + 6 = 0$ 这里 $m = 4$ 且 $b = 6$ 。

(4) $\frac{x}{2} - 1 = 0$ 这里 $m = \frac{1}{2}$ 且 $b = -1$ 。

1.2 求解标准形式的线性方程

请记住，求解一个含有 x 的方程，意思是找出所有使方程成立的 x 的值。对于形式为 $mx + b = 0$ 的线性方程，目标是通过改写方程来孤立出 x ，使它变成：

$$x = \text{某个数}.$$

我们怎样做到这一点呢？我们从原方程开始，写出一连串等价方程，每一个方程都与原方程有相同的解。为了改变方程并保持两边平衡，你必须对方程两边做同样的操作。例如，为了求解线性方程 $x - 2 = 0$ ，你可以在方程两边同时加上2，从而得到 $x = 2$ 。

1.3 例题演算

通常最好的方法就是直接观察解题过程。所以，我们现在来求解几个线性方程。首先考虑方程 $3x - 15 = 0$ 。我们可以先加上+15，然后把所有项除以3。推导过程逐行写出如下：

$$3x - 15 = 0$$

$$3x - 15 + 15 = 0 + 15 \quad (\text{两边同时加上15})$$

$$3x = 15 \quad (\text{化简})$$

$$x = 5 \quad (\text{两边同时除以3})$$

看起来解是 $x = 5$ 。我们可以把 $x = 5$ 代回原方程来复查：

$$3(5) - 15 = 15 - 15 = 0,$$

所以我们的解确实正确。

练习1

求解方程 $4x + 12 = 4$ 。

解答

$$\begin{aligned}4x + 12 &= 4 \\4x + 12 - 12 &= 4 - 12 && \text{(两边同时减去12)} \\4x &= -8 \\x &= -2 && \text{(两边同时除以4)}\end{aligned}$$

复查: $4(-2) + 12 = -8 + 12 = 4$, 这是正确的。

练习2

求解方程 $\frac{z}{5} + 1 = 6$ 。然后检查解是否正确。

解答

$$\begin{aligned}\frac{z}{5} + 1 &= 6 \\ \frac{z}{5} + 1 - 1 &= 6 - 1 \\ \frac{z}{5} &= 5 \\ z &= 25\end{aligned}$$

复查: $\frac{25}{5} + 1 = 5 + 1 = 6$ 。

练习3

求解方程 $5(x + 2) = 2(x - 1)$ 。

解答

$$\begin{aligned}5(x + 2) &= 2(x - 1) \\5x + 10 &= 2x - 2 && \text{(分配律)} \\5x - 2x + 10 &= 2x - 2x - 2 && \text{(两边同时减去2x)} \\3x + 10 &= -2 \\3x + 10 - 10 &= -2 - 10 && \text{(两边同时减去10)} \\3x &= -12 \\x &= -4\end{aligned}$$

复查: 把 $x = -4$ 代入左边的表达式得到 $5(-4 + 2) = 5(-2) = -10$, 把 $x = -4$ 代入右边的表达式得到 $2(-4 - 1) = 2(-5) = -10$ 。两边相等, 因此解 $x = -4$ 是正确的。

2 线性方程的图像

2.1 作为解的有序对

一个有序对是一对实数 (x, y) ，其中顺序很重要，也就是说 $(x, y) \neq (y, x)$ 。一般来说：

$$(a, b) = (c, d) \text{ 当且仅当 } a = c \text{ 且 } b = d.$$

现在假设你有一个含有两个变量的方程：

$$y + 2x = 3.$$

像这样的方程，其解不仅需要 x 的值，还需要一个 y 的值。我们可以把这两个值表示为一个有序对 (x, y) ，因此一个解将是一对数字，而不是单独一个数字。例如，对于上面的方程：

- 有序对 $(1, 1)$ 是一个解，因为 $1 + 2 \cdot 1 = 3$ 。
- 有序对 $(2, 1)$ 不是一个解，因为 $1 + 2 \cdot 2 = 5 \neq 3$ 。
- 有序对 $(0, 3)$ 是一个解，因为 $3 + 2 \cdot 0 = 3$ 。

练习4

考虑方程 $y + x^2 = 4$ 。判断下面这些有序对是不是解。

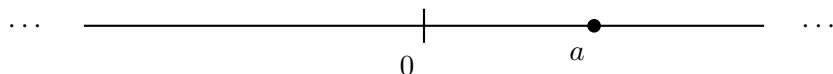
- (a) $(1, 2)$
- (b) $(0, -2)$
- (c) $(3, -5)$
- (d) $(0, 4)$

解答

- (a) $(1, 2)$: $2 + 1^2 = 2 + 1 = 3 \neq 4$ 因此 $(1, 2)$ 不是解。
- (b) $(0, -2)$: $-2 + 0^2 = -2 + 0 = -2 \neq 4$ 因此 $(0, -2)$ 不是解。
- (c) $(3, -5)$: $-5 + 3^2 = -5 + 9 = 4$ 因此 $(3, -5)$ 是解。
- (d) $(0, 4)$: $4 + 0^2 = 4 + 0 = 4$, 因此 $(0, 4)$ 是解。

2.2 直角坐标系

回忆一下，实数线是所有实数组成的集合，它们按照 $<$ 的顺序排列在一条线上。¹ 此外，任何实数 a 都可以表示为这条线上的一个点：



¹写作 $a < b$ 的意思是，数 a 在实数线上位于数 b 的左边。

类似地，也存在一个实平面，它是一个二维网格，用来表示所有可能的有序对 (x, y) ，其中 x 和 y 都是实数。我们通常用 $\mathbb{R}$ 表示实数线，因此把实数平面称为 $\mathbb{R}^2$ 。 $\mathbb{R}^2$ 的另一个名称是坐标图。下图描绘了 $\mathbb{R}^2$ ，其中标出了一个点。



在实数平面 $\mathbb{R}^2$ 上，有两条重要的直线。它们叫作 x -轴和 y -轴，并且用来帮助我们在平面中定位。你可以把 x -轴想象成数轴的一份副本：一条水平且无限长的直线。在 x -轴上有0，它也叫作原点。从这里开始，我们取另一份实数线，把它旋转 90° ，使它变成竖直方向，然后把它接到 x -轴的原点上。 y -轴就是这条竖直线。两条线合在一起形成一个十字形，并在中间的坐标 $(0, 0)$ 处相交。

字母 x 表示一个变量，也就是说，它是一个可以改变其值的数。我们可以想象，当 x 改变其值时，它会在水平的 x -轴上滑动。类似地， y 也是一个变量，所以它也是一个可以改变其值的数。我们可以想象，当 y 改变其值时，它会在竖直的 y -轴上上下下移动。

使用这两个滑块，我们可以表示二维空间中的任意点：我们先水平移动，然后竖直移动。 $\mathbb{R}^2$ 中的每一个点都可以用两个数来描述：一个 x -坐标和一个 y -坐标。这正好就是像 (x, y) 这样的有序对。

例如，有序对 $(3, 2)$ 表示一个点，它从原点向右移动3格，然后向上移动2格。如果 x 分量是负数，那么我们向左移动；如果 y 分量是负数，那么我们沿网格向下移动。

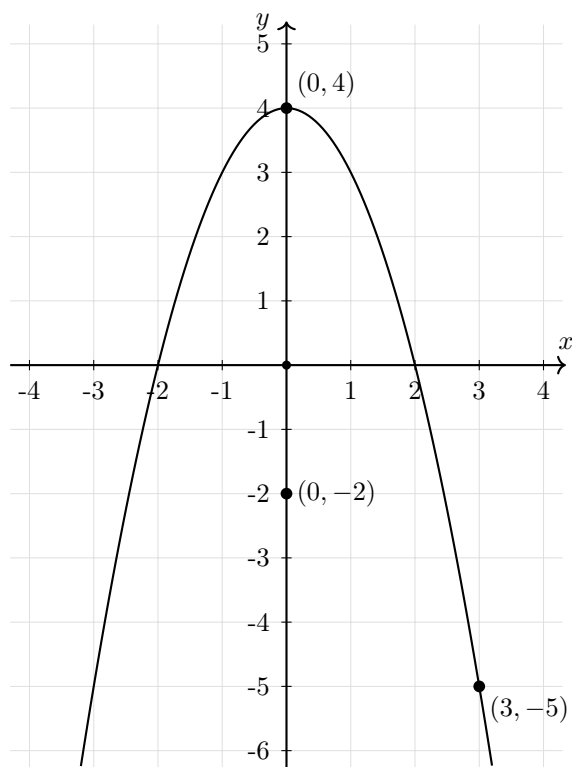
2.3 有序对与图像

我们前面看到，有序对可以表示同时含有 x 和 y 变量的方程的解。有趣的是，我们可以用一幅图来表示一个方程的所有解的集合。这幅图叫作方程的图像，它被定义为所有满足该方程的有序对组成的集合。

图像有两个有用之处：

1. 我们可以用图像直观地表示 y 和 x 之间的关系。
2. 我们可以用图像直接读出解，而不需要做任何代数运算。

作为例子，我们现在考虑方程 $y + x^2 = 4$ 。首先注意到，我们可以把这个方程改写为 $y = 4 - x^2$ 。下面画出了坐标图和该方程的图像，并标出了一些点。



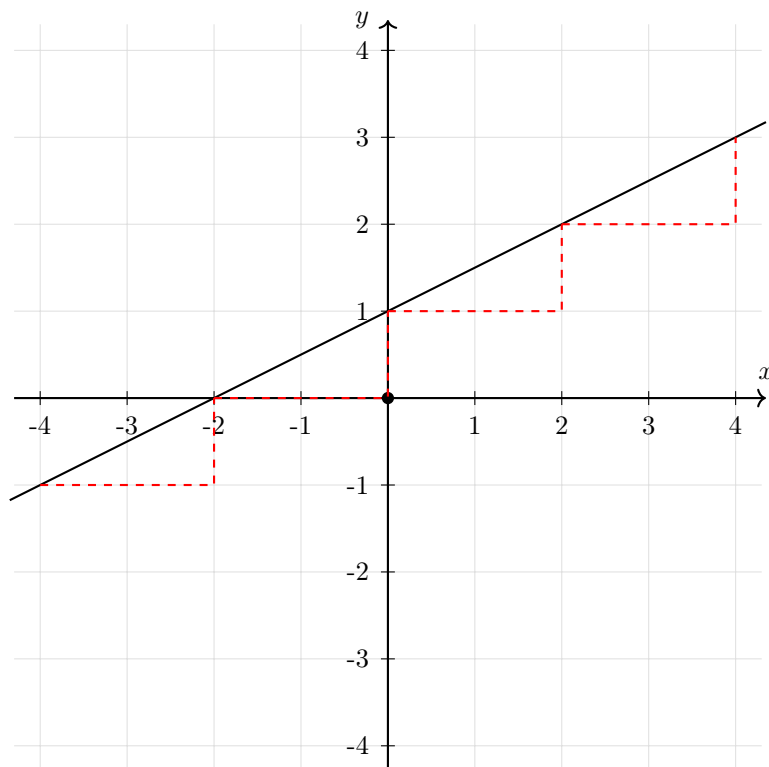
请注意，有两个标出的点 $(0, 4)$ 和 $(3, -5)$ 位于图像上，而标出的点 $(0, -2)$ 不在图像上。如果我们把它们代入方程 $y = 4 - x^2$ ，就会看到：

- $4 = 4 - 0^2$,
- $-5 = 4 - (3)^2$, 并且
- $-2 \neq 4 - 0^2$ 。

因此，前两个位于图像上的点是方程 $y = 4 - x^2$ 的解，而第三个点 $(0, -2)$ 不是解，这就是为什么它不在图像上。

2.4 斜率

由于我们最终关心的是线性模型，所以在本讲剩余部分中，我们只关注直线。这些图像特别有用，因为它们可以用来模拟 y 关于 x 的恒定增长，也就是说，直线以稳定的速率变化：



在上图中，请注意这条直线如何以恒定速率变化：每当我们向右移动2 格，直线总是向上移动1 格。直线的斜率捕捉的正是这个想法：它只是一个数字，告诉我们这条线有多陡，也就是当我们在水平方向移动时，它在竖直方向上变化了多少。因此，更陡的直线会有更大的斜率，而较不陡的直线会有较小的斜率。

我们可以通过比较竖直方向的变化和水平方向的变化来描述一条直线的斜率。这个比较只是一个比值：

$$\text{斜率} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y \text{ 的变化量}}{x \text{ 的变化量}} = \frac{\text{竖直变化量}}{\text{水平变化量}}.$$

我们可以通过选取直线上的两个点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 来说得更精确。那么斜率，记作 m ，可以用下面的公式计算：

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{其中 } x_1 \neq x_2.$$

为什么需要 $x_1 \neq x_2$ ？因为如果它们相同，那么 $x_2 - x_1 = 0$ ，因此我们会除以零，而这是不可能的。不过， $y_1 = y_2$ 完全没有问题，因为这对应于零斜率。另外，请注意，由于直线以恒定速率变化，所以从直线上选取哪两个点并不重要。

使用斜率公式时，重要的是要注意减法的顺序。给定直线上的两个点，你可以自由地把其中任意一个标记为 (x_1, y_1) ，把另一个标记为 (x_2, y_2) 。但是，一旦这样标记完成，你就必须在分子和分母中使用相同的减法顺序。两个正确的公式是：

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{和} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

而两个**错误**的公式是：

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \quad \text{和} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}.$$

练习5

求经过每一对点的直线的斜率。

(a) 点 $(-2, 0)$ 和 $(3, 1)$ 。

(b) 点 $(0, 0)$ 和 $(1, -1)$ 。

解答

(a) 令 $(x_1, y_1) = (-2, 0)$ 且 $(x_2, y_2) = (3, 1)$ 。那么

$$m = \frac{1 - 0}{3 - (-2)} = \frac{1}{5}.$$

(b) 使用 $(x_1, y_1) = (0, 0)$ 和 $(x_2, y_2) = (1, -1)$:

$$m = \frac{-1 - 0}{1 - 0} = -1.$$

2.5 斜率的可视化

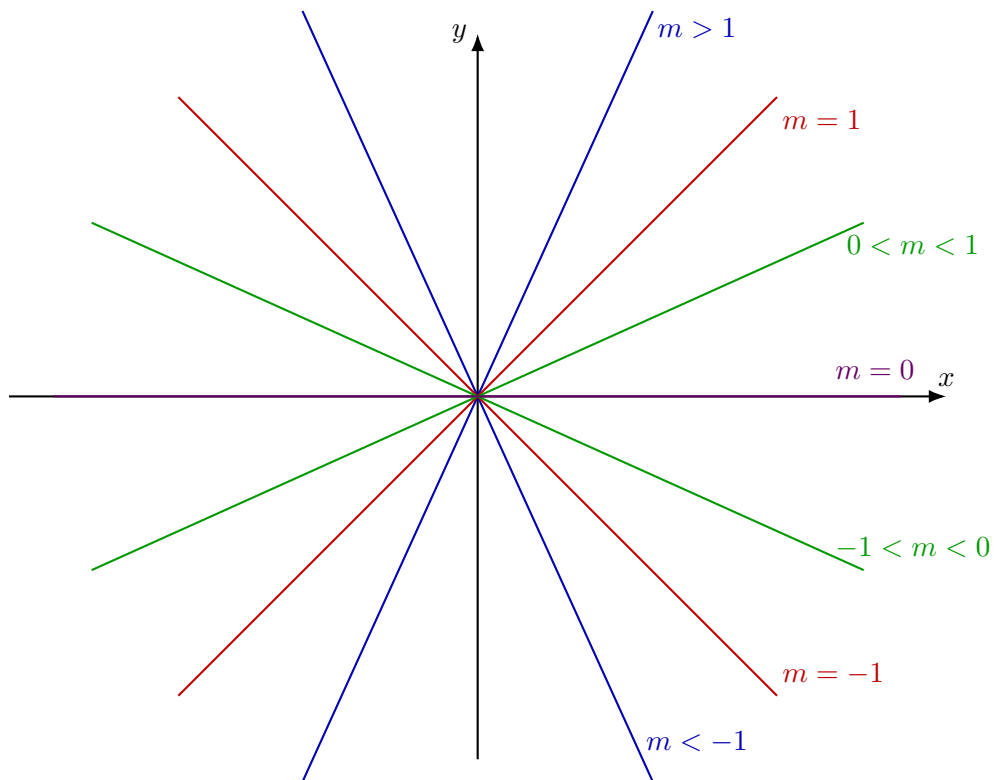
想象你有一条斜率为 $m = 1$ 的直线。根据斜率公式，这意味着竖直变化与水平变化的比值正好是1。例如，如果我们在水平方向移动1个单位，那么这条线在竖直方向也向上移动1个单位。类似地，如果我们水平移动2个单位，那么这条线就向上移动2个单位。

我们可以想象一种斜率大于1的情况。在这种情况下，直线会比 45° 更陡，也就是说，它在竖直方向上上升的量大于它在水平方向上移动的量。

我们也可以想象这样一种情况：直线在水平方向上移动的量大于它在竖直方向上移动的量。在这种情况下，斜率会满足 $0 < m < 1$ 。

如果完全没有竖直变化，那么 $y_2 - y_1 = 0$ ，因此 $m = 0$ 。所以，斜率为零的直线将是完全水平的，与 x -轴平行。

最后，直线也可以向下倾斜。这意味着当我们在水平方向作正向变化时，竖直方向上发生的是负变化。换句话说，当我们向右移动时，直线向下移动。在这种情况下，斜率 m 是一个负数。所有这些可以总结如下。

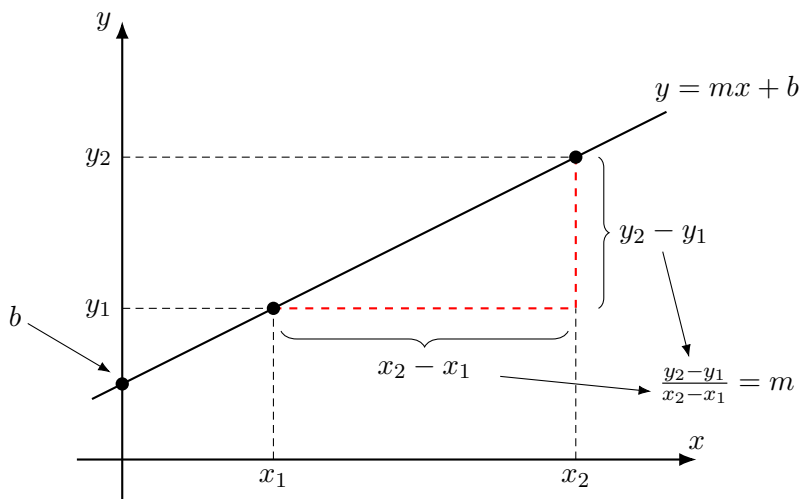


2.6 重新审视线性方程

直线可以用方程 $y = mx + b$ 来表示，其中：

- $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 是直线的斜率，
- b 是 y -截距，也就是直线与 y -轴相交的位置。

这就是为什么我们把形式为 $y = mx + b$ 的方程称为线性方程，因为它们的解的图像总是一条直线。



这个公式完美地描述了一条直线： b 告诉我们从 y -轴上的哪里开始，而斜率 m 告诉我们这条线如何移动。这正是线性模型的理想设置：我们有一个带有两个固定值 m 和 b 的方程，而这两个值告诉我们在模型中应该使用什么样的直线。

3 线性模型例题

我们现在用一些例题来完成对线性模型的讨论。一共有四个例子：出租车、心率监测器、储蓄策略，最后我们将求解一个线性方程，用来在摄氏度和华氏度之间进行转换。

3.1 出租车

假设你正准备坐出租车回家。出租车司机有一条规则：作为起步费用，你必须支付200 日元。然后，每行驶一公里，你还必须支付200 日元。假设你家距离这里8 km。你需要支付多少钱才能到家？

我们的第一个目标是提取相关信息，并写出一个模拟总费用的线性方程。根据上面列出的规则，总费用由下面的公式给出：

$$\text{总费用} = \text{费率} \times \text{距离} + \text{起步费用}$$

如果我们用 T 表示总费用，用 R 表示出租车费率，用 D 表示距离，用 I 表示起步费用，那么上面的方程就变成：

$$T = RD + I.$$

根据题目陈述，我们已知 $I = 200$ ， $R = 200$ ，且 $D = 8$ ，所以可以直接计算 T ：

$$T = (200 \cdot 8) + 200 = 1600 + 200 = 1800 \text{ 日元}.$$

现在假设你行驶了20 km，并且出租车司机的起步费用是200 日元。假设你总共支付了1200 日元，那么出租车费率是多少？

给定 $T = 1200$ ， $D = 20$ ，且 $I = 200$ ，我们求解

$$1200 = 20R + 200$$

所以

$$1000 = 20R \Rightarrow R = 50.$$

出租车费率一定是每km 50 日元。

最后，假设你行驶了12 km，出租车费率是每km 300 日元。假设你总共支付了2000 日元，那么起步费用是多少？

在这种情况下，我们使用 $T = R \cdot D + I$ 来求解 I ：

$$2000 = 300 \cdot 12 + I = 3600 + I \Rightarrow I = 2000 - 3600 = -1600.$$

所以起步费用是负数！由此我们得出结论：要么出租车司机给了我们1600 日元，要么更可能的是，在这种情况下你根本付不起这趟出租车费用。

3.2 心率监测器

假设你正在跑步机上跑步，并且你的心率被测量了两次：

$$(v_1, HR_1) = (8, 125), \quad (v_2, HR_2) = (14, 167).$$

假设静息心率是69 bpm，并且心率与速度之间存在线性关系。我们的问题如下：

- (1) 写出一个线性模型 $HR = mv + b$ 。
- (2) 使用该模型估计当 $v = 12$ km/h 时的 HR 。
- (3) 跑步者想把 HR 保持在大约132 bpm。估计跑步机速度。
- (4) 解释为什么用这个模型预测当 $v = 25$ km/h 时的 HR 可能不可靠。

下面按顺序给出解答：

- (1) 我们可以使用第2 节中的标准公式来计算斜率 m 。在这种情况下，我们有：

$$m = \frac{167 - 125}{14 - 8} = \frac{42}{6} = 7.$$

我们还知道静息心率是69bpm，也就是说当 $v = 0$ 时。这立即给出了直线与竖直轴相交的位置（在这个例子中， y -轴表示心率）。或者，我们也可以选择其中一个数据点并求解 b 。例如，使用 $(v, HR) = (8, 125)$ ，得到：

$$b = HR - mv = 125 - 7 \cdot 8 = 125 - 56 = 69,$$

这是一致的。所以，我们的线性模型是：

$$HR = 7v + 69.$$

- (2) 这里，我们的任务只是在线性方程中假设 $v = 12$ 。把它代入线性模型，并计算对应的 HR 值：

$$HR = 7 \cdot 12 + 69 = 84 + 69 = 153 \text{ bpm}.$$

- (3) 在这种情况下，题目给出的是 HR 的值。因此，我们把它代入模型并求解 v ：

$$132 - 69 = 7v \Rightarrow 63 = 7v \Rightarrow v = \frac{63}{7} = 9 \text{ km/h}.$$

- (4) 如果我们尝试计算与 $v = 25$ 对应的 HR 值，会得到 $HR = 7(25) + 69 = 244$ bpm。这显然是不可能的，因此我们找到了这个模型的局限性。由此可以得出结论：我们最初关于心率相对于速度呈线性关系的假设，只会在某个速度范围内比较有效。²

²为了说得更清楚：想象一下，如果我们选择100km/h 的速度。首先，这是不可能的，因为人类不可能跑得这么快。其次，如果我们根据模型找出对应的心率，就会得到 $HR = 769$ bpm，这同样是不可能的。然而，这确实是我们的模型所预测的结果。这些数值不应该被理解为关于人类生物学的真实事实，而应该被理解为我们模型的明显局限。

3.3 买一只新狗

假设你想买一只新狗，它的价格是350000 日元。你目前已经存了150000 日元，并且根据你的工作情况，你每周可以额外存下20000 日元。根据这些信息，你需要多久才能存够买狗的钱？

为了解决这个问题，我们可以把储蓄建模为：

$$\text{已存金额} = \text{初始储蓄} + (\text{每周储蓄}) \times (\text{时间}).$$

由于目标是350000 日元，初始储蓄是150000 日元，每周储蓄是20000 日元/周，所以我们求解

$$350000 = 150000 + 20000t.$$

两边同时减去150000，得到：

$$200000 = 20000t \Rightarrow t = 10.$$

因此，你需要10 周才能存够买狗的钱。

3.4 温度转换

你的朋友邀请你下课后去公园玩。这听起来不错，所以你答应了。然后他说：“一定要带外套！外面会有52 度。”你觉得这听起来很奇怪，因为到底为什么在52 度的高温下还需要外套？然后你意识到你的朋友是美国人，他大概说的是另一种温度系统：华氏度。

我们可以使用下面的线性方程把摄氏度转换成华氏度：

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

为了看出这两种温度系统之间的差异，我们先令 $F = 52$ 并求解 C ：

$$52 = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow 20 = \frac{9}{5}C \Rightarrow C = 20 \cdot \frac{5}{9} = \frac{100}{9} \approx 11.1^\circ C.$$

现在，我们也可以反过来令 $C = 52$ ，并计算对应的 F 值：

$$F = \frac{9}{5} \cdot 52 + 32 = \frac{468}{5} + 32 = \frac{468}{5} + \frac{160}{5} = \frac{628}{5} = 125.6^\circ F.$$