

MAT120: 论证 第8讲讲义

非线性模型

在上一讲中，我们介绍了线性模型，其中变量之间的关系用直线来描述。在本讲中，我们继续讨论非线性模型。这些模型中，变量之间的关系不再是一条直线。对我们来说，最重要的例子将是二次模型，它们自然地出现在几何、物理以及许多现实情境中。我们还会简要讨论平方反比定律，并看几个应用例子。

1 二次方程

1.1 什么是二次方程？

一个关于一个变量的二次方程，是指任何可以写成如下形式的方程：

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

这里 a 、 b 和 c 是实数，并且 $a \neq 0$ 。

如果取 $a = 0$ ，那么这个方程就不再是二次方程。相反，它会化为

$$bx + c = 0,$$

这是一个线性方程。从这个意义上说，我们可以把二次方程看作是在线性方程之后，下一个最简单的方程类型。

练习1

判断下面每个方程是否为二次方程。

(a) $2x^2 + 4x - 2 = 0$

(b) $3x - x^2 + 1 = 0$

(c) $z^2 + 3z - 2 = 0$

(d) $x^2 - 1 = 0$

(e) $x - 2 = 0$

解答

除了(e)之外，所有这些都是二次方程。方程 $x - 2 = 0$ 是线性方程（它没有 x^2 项）。

1.2 检查解

请记住：要检查某个 x 的值是否是一个方程的解，我们把这个值代入方程，并观察左边是否变成0。

练习2

判断下面这些 x 的值是否为二次方程

$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

的解。

(a) $x = 2$

(b) $x = 0$

(c) $x = -1$

(d) $x = -2$

解答

- (a) $x = 2$: $2^2 + 3(2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12 \neq 0$, 所以 $x = 2$ 不是解。
(b) $x = 0$: $0^2 + 3(0) + 2 = 0 + 0 + 2 = 2 \neq 0$, 所以 $x = 0$ 不是解。
(c) $x = -1$: $(-1)^2 + 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, 所以 $x = -1$ 是解。
(d) $x = -2$: $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, 所以 $x = -2$ 是解。

2 寻找二次方程的解

2.1 寻找解的方法

在上一讲讨论线性方程时, 我们看到寻找线性方程的解相对简单: 我们化简方程中的表达式, 然后重新排列所有内容, 使变量 x 被单独放在方程左边, 而一个数放在右边。

与此相比, 求解二次方程往往困难得多。事实上, 有时它甚至不可能有解 (至少如果我们只考虑实数解的话)。当我们面对像 $ax^2 + bx + c = 0$ 这样的方程时, 把 x 单独放在一边的策略并不太好。现在有两个含有 x 的项, 其中一个还是 x^2 项, 所以很难重新排列二次方程, 使 x 单独出现在一边。

在这门课中, 我们只会用一讲来讨论二次方程。因此, 我们无法进入它们的完整理论。相反, 我们将关注三种主要方法:

- 因式分解,
- 使用平方根,
- 二次公式。

我们使用哪种方法, 通常取决于具体方程和问题的背景。

2.2 因式分解

有时, 我们可以通过把二次方程改写成两个括号的乘积来寻找它的解。我们可以把这看作某种化简的反过程: 因式分解就是把一个二次式重新包装成括号的过程。

作为例子, 考虑表达式 $x^2 + 3x + 2$ 。我们通过把它改写成一个乘积来分解这个二次式:

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

我们怎么知道这两个表达式相等呢? 我们可以展开右边的表达式来复查。表达式 $(x + 1)(x + 2)$ 可以通过分配律展开:

$$\begin{aligned}(x + 1)(x + 2) &= (x + 1)x + (x + 1)2 \\ &= (x^2 + x) + (2x + 2) \\ &= x^2 + 3x + 2.\end{aligned}$$

最后的等式确认了 $(x + 1)(x + 2)$ 是 $x^2 + 3x + 2$ 的因式分解。

2.2.1 用因式分解求解二次方程

假设我们有两个实数 a 和 b , 并且 $a \times b = 0$ 。这个乘积等于零的唯一可能方式, 是至少有一个因子

等于零:

如果 $a \times b = 0$, 那么要么 $a = 0$ 要么 $b = 0$ (或者两者都为0).

这个观察称为零因子性质。

现在考虑二次方程

$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

我们可以把左边因式分解, 并把方程改写为

$$(x + 1)(x + 2) = 0.$$

这说明 $(x + 1)$ 和 $(x + 2)$ 的乘积等于零, 所以根据零因子性质, 我们得出结论: 要么

$$x + 1 = 0 \quad \text{要么} \quad x + 2 = 0.$$

解出这些方程, 得到 $x = -1$ 和 $x = -2$ 。因此, $x = -1$ 和 $x = -2$ 都是 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 的解 (正如练习2中所确认的)。

2.2.2 如何因式分解 (当 $a = 1$ 时)

让我们考虑较简单的情况, 也就是二次项系数为 $a = 1$ 。在这种情况下, 因式分解看起来像

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n).$$

展开右边得到

$$(x + m)(x + n) = x^2 + mx + nx + mn = x^2 + (m + n)x + mn.$$

因此, 我们要寻找两个数 m 和 n , 使得

$$m + n = b \quad \text{且} \quad mn = c.$$

找到这样的数对 (m, n) , 就自动得到了因式分解。

例子: $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, 因为 $1 + 2 = 3$ 且 $1 \cdot 2 = 2$ 。

练习3

因式分解下面这些二次式。

(a) $x^2 + 10x + 9$

(b) $x^2 + 5x + 6$

(c) $x^2 + 4x + 4$

解答

(a) 我们需要两个数，它们相加为10，相乘为9。数9和1可以，所以

$$x^2 + 10x + 9 = (x + 9)(x + 1).$$

(b) 我们需要两个数，它们相加为5，相乘为6。数3和2可以，所以

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2).$$

(c) 我们需要两个数，它们相加为4，相乘为4。唯一的选择是2和2，所以

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2.$$

2.3 平方根

一个数的平方有一个逆运算，叫作平方根。我们把平方根写作 $\sqrt{\quad}$ 。

例如，如果

$$x^2 = a,$$

那么

$$x = \sqrt{a} \quad \text{或} \quad x = -\sqrt{a}.$$

这里有两个解，因为一个正数和一个负数平方后都可以得到同一个值。例如， $x^2 = 25$ 的解是 $x = 5$ 和 $x = -5$ 。

练习4

计算下面方程的解（在实数范围内）。

(a) $x^2 = 16$

(b) $x^2 = 81$

(c) $x^2 = -1$

(d) $x^2 - 1 = 0$

(e) $x^2 - 9 = 0$

(f) $x^2 + 2 = 18$

解答

(a) $x^2 = 16$ 的解是 $x = 4$ 和 $x = -4$ 。

(b) $x^2 = 81$ 的解是 $x = 9$ 和 $x = -9$ 。

(c) $x^2 = -1$ 没有实数解（每个实数的平方都是非负的）。

(d) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ 。

(e) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$ 。

(f) $x^2 + 2 = 18 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$ 。

2.4 二次公式

有一个通用公式，可以用来寻找任何形式为

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

的二次方程的解。解由下面的公式给出：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

我们需要 $b^2 - 4ac \geq 0$ ，因为否则我们就会对负数开平方，而这在实数范围内是不可能的。

2.5 平方反比定律

有一个著名的数学关系叫作平方反比定律。它的形式是

$$y = \frac{a}{x^2}.$$

重新排列得到 $x^2 = \frac{a}{y}$ ，因此

$$x = \sqrt{\frac{a}{y}} \quad \text{或} \quad x = -\sqrt{\frac{a}{y}}.$$

如果 x 表示距离，那么我们只使用正值。

这种关系出现在科学的许多领域中。例子包括：

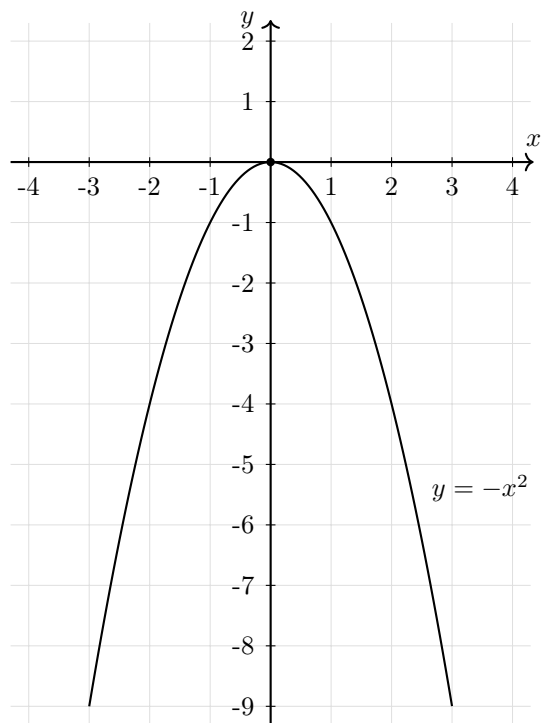
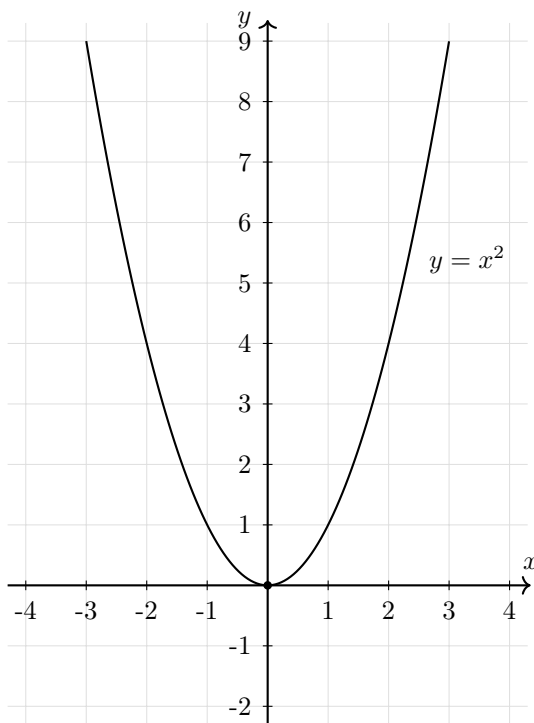
- 牛顿万有引力定律，
- 库仑电力定律，
- 光的亮度随距离的变化，
- 来自热源的温度，
- 磁场强度。

3 二次式与平方反比定律的几何

3.1 二次函数图像

二次方程对应于一种叫作抛物线的曲线图像。这些曲线不同于直线，因为它们没有恒定斜率。相反，它们的变化率会根据图像上的位置而加快或减慢。

一般来说，一个二次方程 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像会呈U形：它会在图像中途转向，并向另一个方向弯曲。根据方程的不同，抛物线会改变它的形状。



- $y = x^2$ 的图像在原点处转向，并向上开口。它关于 y -轴对称，因为 $(-x)^2 = x^2$ 。
- $y = -x^2$ 的图像也在原点处转向，但向下开口。
- 一般来说，如果 $a > 0$ ，那么抛物线向上开口；如果 $a < 0$ ，那么抛物线向下开口。抛物线总是关于它们的转折点对称。

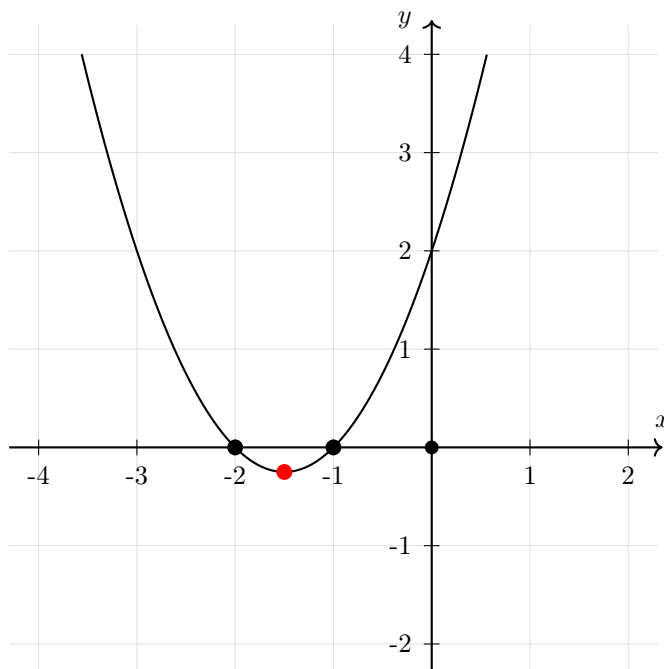
3.2 例子：方程 $y = x^2 + 3x + 2$

$y = x^2 + 3x + 2$ 的图像是所有满足该方程的点 (x, y) 组成的集合。由于 x^2 项的系数为正，这个图像将呈U形。

重要的是，这个图像会在两个位置穿过 x -轴。 x -轴是满足 $y = 0$ 的水平线。图像接触 x -轴的任何地方， y 的值都是0。所以这两个位置就是方程

$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

的解。我们已经找到这些解是 $x = -2$ 和 $x = -1$ 。因此，图像在 $x = -2$ 和 $x = -1$ 处穿过 x -轴。



3.3 转折点（顶点）

二次函数图像有一个特殊的点，叫作转折点，或顶点。这是图像改变方向的点，它也描述了图像的对称轴。为了找到抛物线的转折点，我们可以把二次方程改写为顶点式，这样转折点就很容易识别。一般来说，二次式 $ax^2 + bx + c$ 的转折点具有：

$$x\text{-坐标} = -\frac{b}{2a}, \quad y\text{-坐标} = c - \frac{b^2}{4a}.$$

理解这一点的一种方法（使用我们在本课程中不会展开的代数）是下面的恒等式：

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

右边称为抛物线的顶点式。

例子：对于 $y = x^2 + 3x + 2$ ，我们有 $a = 1$ 、 $b = 3$ 、 $c = 2$ ，所以转折点出现在

$$x = -\frac{3}{2}, \quad y = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}.$$

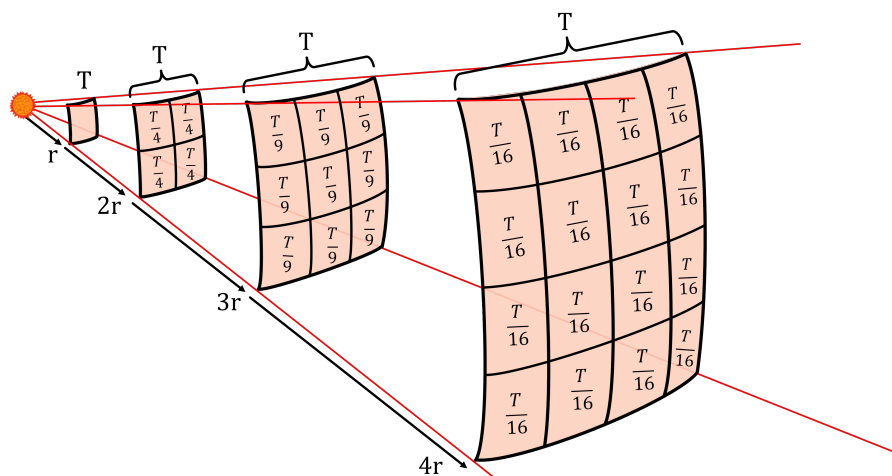
所以转折点是 $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ ，它在上图中用红色标出。

3.4 平方反比定律的几何

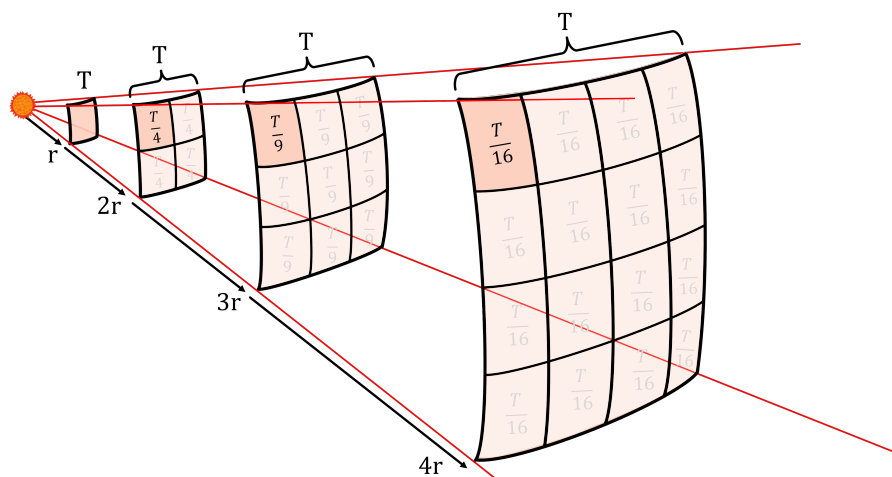
一个气球图像。 想象一个气球，我们用笔在它上面画一个小正方形。如果我们给气球充气，那么这个正方形也会变大。如果我们继续不断充气，那么这个正方形就会越来越大。我们可以问：当气球变大时，我们的小正方形的面积如何变化？为了方便起见，假设这个气球是一个半径为 r 的完美球体。如果我们把气球的半径加倍，那么这个小正方形的面积并不只是加倍。相反，它会变成

原来的四倍。如果我们把半径变成三倍，面积就变成九倍。如果我们把半径乘以4，面积就变成十六倍。所以，面积的变化与 r^2 有关。

另一个视角。 考虑太阳，但它非常遥远，所以看起来像一个小点。太阳向所有方向发出能量。想象一个包围太阳的巨大球面，并想象在这个球面上画了一个小正方形。我们测量有多少能量穿过这个正方形。



现在，如果我们把测试球面放大到两倍，那么这个正方形的面积就会变成四倍。离开太阳的总能量没有改变，但现在它分布在一个面积大四倍的表面上。这意味着每单位面积的能量变成了原来的 $\frac{1}{4}$ 。如果我们把半径变成三倍，能量就会分布在一个面积大九倍的表面上，所以每单位面积的能量变成原来的 $\frac{1}{9}$ 。这就是平方反比定律。



4 模型与应用例题

4.1 海盗的炮弹

一个被抛到空中的物体的高度可以用二次方程建模。这称为抛体运动。*projectile* 这个词大致意思是某种被用力抛到空中的东西。

我们可以想象把一颗子弹竖直向上发射到空中。子弹以很大的速度离开枪口，所以它会向上爬升一段时间。重力不断把子弹向下拉，并与子弹向上的运动对抗。随着时间推移，重力赢得这场斗争：子弹上升得越来越少，直到它短暂地停止上升。之后，子弹落回地面，并且在下落时加速。

当我们以一个角度向上发射子弹时，同样的过程也成立。在这种情况下，速度有一个向上的分量（竖直速度）和一个横向的分量（水平速度）。竖直速度控制子弹能飞多高。

基于这个故事，我们可以发现一个常用公式：

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

这里：

- h_0 是初始高度，
- v_0 是初始竖直速度（物体向上运动得有多快），
- g 是重力加速度。

如果我们作一些假设来让事情更简单（例如 $g = 10$ 且 $h_0 = 1$ ），这个方程就变成

$$h(t) = 1 + v_0 t - 5t^2.$$

这是一个二次式，其中 $a = -5$ 、 $b = v_0$ 、 $c = 1$ 。它的顶点式为：

$$h(t) = -5 \left(t - \frac{v_0}{10} \right)^2 + \left(1 + \frac{v_0^2}{20} \right).$$

转折点告诉我们物体达到的最大高度。

练习6

假设我们有一门大炮，把一颗炮弹向上发射到空中。使用上面的模型，求下面情况下的最大高度（以及达到该高度的时间）：

- (a) $v_0 = 20 \text{ m/s}$
- (b) $v_0 = 40 \text{ m/s}$

解答

最大值出现在顶点处，也就是 $t = \frac{v_0}{10}$ 。

(a) 如果 $v_0 = 20$ ，那么 $t = \frac{20}{10} = 2$ 秒，并且

$$h(2) = 1 + 20(2) - 5(2^2) = 1 + 40 - 20 = 21.$$

所以最大高度是21 米，在2 秒后达到。

(b) 如果 $v_0 = 40$ ，那么 $t = \frac{40}{10} = 4$ 秒，并且

$$h(4) = 1 + 40(4) - 5(4^2) = 1 + 160 - 80 = 81.$$

所以最大高度是81 米，在4 秒后达到。

4.2 篝火模型

我们使用平方反比定律来模拟距离篝火 d 处的温度 T ：

$$T(d) = 15 + \frac{k}{d^2},$$

其中 d 是我们与火之间的距离，而 k 是一个我们还需要确定的常数。

练习7

- (a) 假设在1 米处的温度是 55° 。 k 是多少？
- (b) 在2 米处的温度是多少？
- (c) 在0.5 米处的温度是多少？
- (d) 假设我们希望温度是 45° 。我们应该坐多远？

解答

(a) 如果 $d = 1$ ，那么 $T(1) = 15 + k = 55$ ，所以 $k = 40$ 。

(b) 当 $d = 2$ 时：

$$T(2) = 15 + \frac{40}{2^2} = 15 + \frac{40}{4} = 25^\circ.$$

(c) 当 $d = 0.5$ 时：

$$T(0.5) = 15 + \frac{40}{(0.5)^2} = 15 + \frac{40}{0.25} = 175^\circ.$$

(d) 如果 $T(d) = 45$ ：

$$45 = 15 + \frac{40}{d^2} \Rightarrow 30 = \frac{40}{d^2} \Rightarrow d^2 = \frac{4}{3}.$$

因此

$$d = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15 \text{ 米}.$$