

MAT120: 论证 第9讲讲义

指数模型

在前面的几讲中，我们开始对变量之间的关系进行建模。我们首先学习了线性模型（直线），然后学习了一些基本的非线性模型（尤其是二次模型）。在本讲中，我们继续讨论指数模型。指数增长和指数衰减非常著名，因为它们出现在许多现实情境中，尤其是当某些事物在相等的时间步长中按固定倍数增长（或缩小）时。

1 指数的代数

1.1 乘法与乘方

回忆一下，乘法可以简单地定义为重复加法。例如，把一个数 a 乘以一个整数 n ，意思就是把 a 加到自身 n 次：

$$n \cdot a = a + a + \cdots + a \quad (n \text{ 次})。$$

正如我们在第5 讲中看到的，我们也可以把这个概念扩展到其他倍数：数 n 不一定需要是整数，我们仍然可以定义一个有意义的乘积 $n \cdot a$ ，并且它遵循通常的乘法规则（例如交换律和结合律）。

类似地，对一个自然数 n 进行乘方，意思是把 a 与自身重复相乘：

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \quad (n \text{ 次})。$$

所以：乘法是“重复加法”，而乘方是“重复乘法”。当我们考虑像 a^n 这样的指数式时，通常把 a 称为底数，把 n 称为指数。

1.2 指数规则（当 $a \neq 0$ 时）

当底数 a 相同时，有几条非常重要的规则：

- (1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
- (2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ （这要求 $a \neq 0$ ）,
- (3) $(a^m)^n = a^{mn}$,
- (4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ 。

这些规则允许我们操作指数，并把它们化成更简单的形式。例如：

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32.$$

为什么这个指数规则合理？

虽然这些规则一开始可能看起来很随意，但它们其实很简单地来自乘方的定义。如果我们把左边写出来，那么

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ 次}}, \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ 次}}.$$

所以乘积 $a^m \cdot a^n$ 包含 m 个 a ，然后又包含 n 个 a ，因此总共有 $m+n$ 个 a ：

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ 次}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ 次}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(m+n) \text{ 次}} = a^{m+n}.$$

其他规则也类似，并且可以用乘法的基本性质来说明，例如交换律和结合律。

1.3 零指数与负指数（当 $a \neq 0$ 时）

我们可以把指数的思想扩展到其他数。当我们在第5 讲中讨论数的概念时，我们看到过乘法逆元性

质：任何非零实数 a 都有一个特殊的逆数，它与 a 相乘后等于1。我们把这个逆数写作 $\frac{1}{a}$ ，所以

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0).$$

我们也把这个逆数写成指数形式：

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0).$$

这就是为什么我们要求 a 非零：如果我们试图写 0^{-1} ，那么我们就在写一个分母为零的分数，而这是没有良好定义的。

我们可以利用指数规则，并从 a^{-1} 出发来描述其他负指数。例如，由于 $-2 = (-1) \cdot 2$ ，我们可以使用规则 $(a^m)^n = a^{mn}$ 来改写：

$$a^{-2} = a^{(-1) \cdot 2} = (a^{-1})^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}.$$

一般来说，对于非零实数 a ，我们使用下面三条规则：

- (1) $a^0 = 1$,
- (2) $a^{-1} = \frac{1}{a}$,
- (3) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ 。

为什么零次方等于一？

任取一个正整数 m 。那么 $0 = m - m$ 。使用指数规则 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ，我们得到：

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1.$$

为了看一个规则 $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ 的例子，考虑底数2：

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

练习1

计算下面各项。

- (a) 3^0
- (b) 2^{7-5}
- (c) 4^{-2}

解答

- (a) $3^0 = 1$ 。
- (b) $2^{7-5} = 2^2 = 4$ 。
- (c) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ 。

1.4 有理指数

我们也可以使用不是整数的指数。第一步是解释像 $\frac{1}{2}$ 这样的有理数指数。

假设 $a \geq 0$ 。如果我们希望 $a^{1/2}$ 与指数规则一致，那么我们会期望：

$$(a^2)^{1/2} = a^{2 \cdot (1/2)} = a^1 = a, \quad \text{并且} \quad (a^{1/2})^2 = a^{(1/2) \cdot 2} = a^1 = a.$$

所以，应用指数 $\frac{1}{2}$ 会抵消平方的效果（至少当 $a \geq 0$ 时）。但我们已经知道平方的一个逆运算：平方根。因此，

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \quad (a \geq 0).$$

更一般地，对于 $a \geq 0$ 且 $n \in \mathbb{N}$ ，我们定义

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

例如，因为 $2^3 = 8$ ，所以 $8^{1/3} = 2$ ，也就是说 $\sqrt[3]{8} = 2$ 。

1.5 无理指数

到目前为止，我们已经把指数从自然数扩展到负整数，然后又扩展到有理数。现在我们再进一步：也可以把一个（正）数提升到一个无理数指数。

例如： a^π ，其中 π 是一个特殊的无理数，它等于任意圆的

$$\pi = \frac{\text{周长}}{\text{直径}}$$

这个比值。

乍一看，用我们已经理解的思想来定义 a^π 似乎是不可能的。但是，如果我们记得无理数可以用有理数来近似，那么事情并没有看起来那么糟。

回忆一下， π 有十进制展开：

$$\pi = 3.14159 \dots$$

所以如果 $a > 1$ ，我们会预期 a^π 是“比 a^3 稍微多一点，但小于 a^4 ”。

用有理数近似圆周率

我们可以通过加入更多位数字，得到越来越好的 π 的有理近似：

步骤1: $\pi \approx 3$

步骤2: $\pi \approx 3.1 = 3 + 0.1 = 3 + \frac{1}{10}$

步骤3: $\pi \approx 3.14 = 3 + 0.1 + 0.04 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}$

步骤4: $\pi \approx 3.141 = 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000}$

步骤5: $\pi \approx 3.1415 = 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 + 0.0005 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000}$

依此类推。

请注意，每一个近似都被写成了有理数的和。这意味着我们可以反复使用指数规则

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

来构造 a^π 的近似。

例如：

步骤1: $a^3 = a^3$

步骤2: $a^{3.1} = a^{3+\frac{1}{10}} = a^3 \cdot a^{\frac{1}{10}}$

步骤3: $a^{3.14} = a^{3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}} = a^3 \cdot a^{\frac{1}{10}} \cdot a^{\frac{4}{100}}$

步骤4: $a^{3.141} = a^{3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1000}} = a^3 \cdot a^{\frac{1}{10}} \cdot a^{\frac{4}{100}} \cdot a^{\frac{1}{1000}}$

在每一个新步骤中，我们都乘以一个形如 $a^{(\text{数字})/10^k}$ 的数，它是 a 的一个幂，但指数非常小。因为非常小的指数接近0，所以这些值 $a^{(\text{数字})/10^k}$ 接近 $a^0 = 1$ 。所以每一个新步骤只会稍微改变答案。这就是为什么这些近似最终会稳定下来（它们会收敛）到一个单一的值，而我们把这个值定义为 a^π 。

1.5.1 例子：无理指数 (2^π)

为了看一个明确的例子，我们来计算 2^π 。首先，我们知道 $2^3 = 8$ 且 $2^4 = 16$ 。因为 π 介于3 和4 之间，所以我们预期 2^π 在8 和16 之间。

使用同样的逐步近似思想（借助计算器），我们可以得到：

步骤1: $2^3 = 8$

步骤2: $2^{3.1} = 2^3 \cdot 2^{0.1} \approx 8 \cdot 1.071773 \approx 8.57419$

步骤3: $2^{3.14} = 2^3 \cdot 2^{0.1} \cdot 2^{0.04} \approx 8 \cdot 1.071773 \cdot 1.028114 \approx 8.81524$

步骤4: $2^{3.141} = 2^3 \cdot 2^{0.1} \cdot 2^{0.04} \cdot 2^{0.001} \approx 8.81524 \cdot 1.000693 \approx 8.82135$

步骤5: $2^{3.1415} = 2^3 \cdot 2^{0.1} \cdot 2^{0.04} \cdot 2^{0.001} \cdot 2^{0.0005} \approx 8.82135 \cdot 1.000347 \approx 8.82441$

这个过程可以继续下去，答案会越来越接近真实值。事实上，

$$2^\pi \approx 8.82498.$$

这符合我们的预期： π 介于3 和4 之间（但更接近3），所以 2^π 应该介于8 和16 之间（但更接近8）。

1.6 带变量的指数

根据到目前为止的讨论，看起来我们可以有意义地把一个（正）数 a 提升到任意实数 b 的幂，包括无理数。换句话说，只要底数 a 是正数，我们总是可以写 a^b 。

我们也可以把一个变量放在指数上。我们写 a^x ，表示“ a 的 x 次幂”。由于变量可以取许多不同的值，我们可以想象 x 的值沿着实数线滑动，从而给出不同的 a^x 的值。例如：

- 如果 $x = 2$ ，那么 $a^x = a^2$ ，
- 如果 $x = 0$ ，那么 $a^x = a^0 = 1$ ，
- 如果 $x = -\pi$ ，那么 $a^x = a^{-\pi}$ 。

换句话说，表达式 a^x 同时包含了关于 a 的所有指数的信息。

我们还可以进一步考虑由一个变量构成的代数表达式作为指数。例如，像 $3^{x/2}$ 或 4^{x^2} 这样的表达式，都是有效的指数表达式。

1.7 求解指数方程

回忆一下，求解一个含有一个变量的方程，意思是找出所有使等式成立的变量值。含有指数的方程也是一样。例如，考虑方程：

$$3^x = 9.$$

这个方程的意思是：“3 的某个次方等于9。”我们注意到 $9 = 3^2$ ，所以解一定是 $x = 2$ 。相反， $x = 3$ 不是解，因为 $3^3 = 27 \neq 9$ 。

练习2

求解下面的方程。

- (a) $2^x = 4$
- (b) $2^x = 16$
- (c) $2^x = 1$
- (d) $2^x = \sqrt{2}$

解答

- (a) $4 = 2^2$ ，所以 $x = 2$ 。
- (b) $16 = 2^4$ ，所以 $x = 4$ 。
- (c) $1 = 2^0$ ，所以 $x = 0$ 。
- (d) $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ ，所以 $x = \frac{1}{2}$ 。

1.7.1 用对数求解指数方程

在这门课中，我们只会求解非常基本的指数方程（例如练习2 中的那些）。不过，值得注意的是，有些指数方程的解并不那么明显。例如，考虑方程：

$$4^x = 17.$$

我们知道 $4^2 = 16$ 且 $4^3 = 64$ ，所以我们预期 x 在2 和3 之间，也许非常接近2。但是，仅凭观察，这似乎就是我们能做到的最好结果。

在变量 x 出现在指数中的方程中，乘方有一个逆运算，叫作对数。能够抵消 4^x 的对数写作 $\log_4$ ，并且满足：

$$\log_4(4^x) = x.$$

所以，为了求解 $4^x = 17$ ，我们只需要对两边同时应用 $\log_4$ ：

$$\log_4(4^x) = \log_4(17) \Rightarrow x = \log_4(17).$$

使用计算器， $\log_4(17) \approx 2.04373$ 。更一般地，对于任意底数 $n > 0$ 且 $n \neq 1$ ，都有一个对数 $\log_n$ ，它是 n^x 的逆运算。

值得注意的是，对数通常是一个复杂且无限长的小数，不能不借助计算器来计算。所以，在本课程中，我们不会考虑任何需要对数来求解的方程。

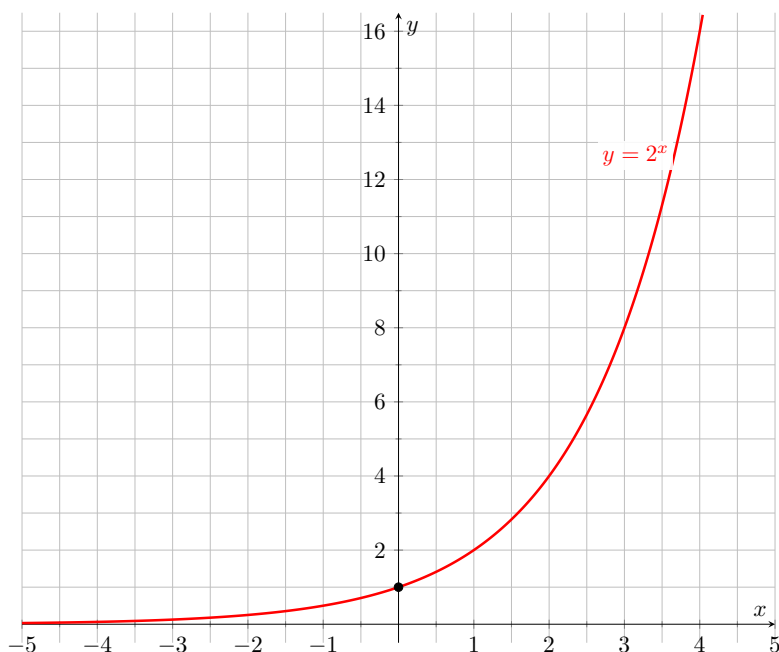
2 指数函数的几何

2.1 $y = 2^x$ 的图像

为了理解 $y = 2^x$ 的图像，列出一些输入-输出值很有帮助：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

根据这些数据，我们看到 $y = 2^x$ 的图像应该经过 y -轴上的点 $(0, 1)$ 。我们还可以观察到，每当 x 增加1，输出值 2^x 就会加倍。类似地，每当 x 减少1，输出就会除以2。事实上，我们可以看到，当 x 增长时， 2^x 增长得非常快。当 x 变得越来越负时， 2^x 会越来越接近0，但它永远不会真正达到0。下面画出了 $y = 2^x$ 的实际图像草图。



2.2 当我们使用 $y = b^x$ 且 $b > 1$ 时，会发生什么变化？

在前面的例子中，我们使用了 $b = 2$ ，并画出了 2^x 的图像。下面你会看到不同 b 值对应的指数图像草图。这里有两个关键事实：

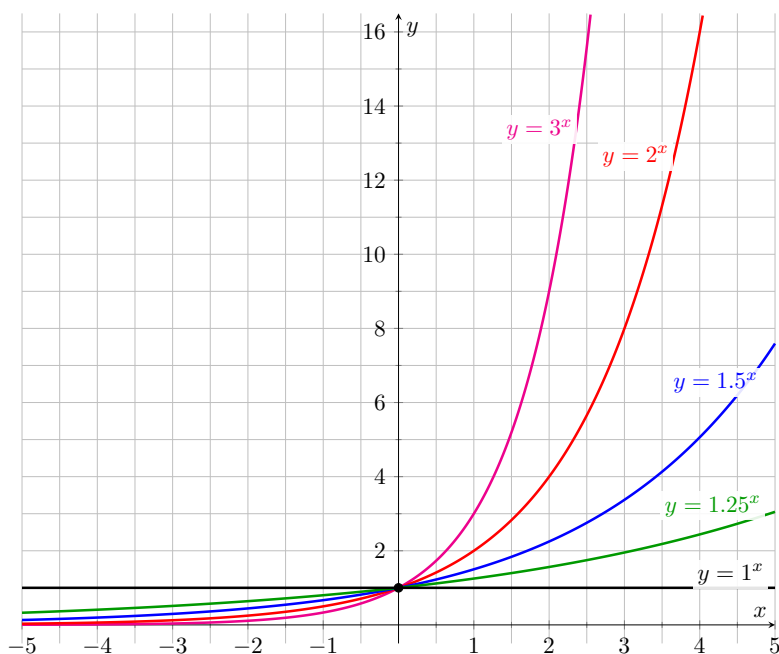
- (1) 对每个 $b > 0$ ，都有 $b^0 = 1$ ，所以每个指数图像都经过 $(0, 1)$ 。
- (2) 底数 b 称为增长率，因为它告诉你当 x 增加1 时，输出需要乘以的因子。

当 $b > 1$ 时，底数 b 越大，随着 x 增加，图像增长得越快。例如：

- 如果 $b = 3$ ，那么 x 增加1 会使输出乘以3。

- 如果 $b = 1.5$ ，那么 x 增加1 会使输出乘以1.5。

一般来说，每当 $b > 1$ 时，方程 $y = b^x$ 称为指数增长函数，而值 b 称为增长因子。



2.3 指数衰减

如果 $0 < b < 1$ ，那么 $y = b^x$ 是一个指数衰减函数。

它仍然经过 $(0, 1)$ ，因为 $b^0 = 1$ 。但现在，当 x 增加1 时，你乘以的是一个小于1 的数，所以输出会缩小。

例子：如果 $b = \frac{1}{2}$ ，那么每向右走一步，输出就乘以 $\frac{1}{2}$ ，所以数值每次都会减半。

当 x 变得越来越大时， b^x 会越来越接近0。当 x 变得非常负时， b^x 会变得非常大。

2.3.1 把增长变成衰减

使用指数规则：

$$b^{-x} = \frac{1}{b^x}.$$

这告诉我们， $y = b^{-x}$ 的图像与 $y = b^x$ 的图像关于 y -轴对称。但我们也可以改写：

$$b^{-x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x.$$

所以，反射图像会把底数从 b 变成 $\frac{1}{b}$ 。这允许我们把衰减理解成某种“反向”的增长。例如，为了模拟一个量在 x 每前进一步时减半，我们可以使用分数增长因子：

$$2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

2.4 指数增长的一般模型

本课程中我们会使用的最一般的指数模型是：

$$y = a \cdot b^{kx}.$$

这里：

- a 是初始值（起始值），
- b 是增长率（或衰减率），
- k 是增长常数（如果需要，它可以缩放时间变量），
- x 通常表示时间。

再次强调：对于取实数值的指数模型，我们通常假设增长率 b 大于零。有三种可能：

- 如果 $0 < b < 1$ ，那么我们有**指数衰减**，
- 如果 $b = 1$ ，那么我们**完全没有增长**（因为函数恒定为 $y = 1$ ），并且
- 如果 $b > 1$ ，那么我们有**指数增长**。

3 例题

3.1 米粒与棋盘

假设你在棋盘的第一个格子上放1 粒米。在第二个格子上，你放2 粒米。在第三个格子上，你放4 粒米。在第四个格子上，你放8 粒米。你继续这个过程。

练习3

一个棋盘有 8×8 个格子。最后一个格子上有多少粒米？

解答

第一个格子有 2^0 粒米，第二个格子有 2^1 粒米，第三个格子有 2^2 粒米，依此类推。因此第64 个格子有

$$2^{63}$$

粒米。
数值上，

$$2^{63} = 9,223,372,036,854,775,808 \approx 9.22 \times 10^{18}.$$

这是一个大得荒唐、很难想象的数字。作为参考：地球上一年生产的米粒总数大约会落在棋盘的46 或47 个格子附近（取决于估计方式）。

3.2 细菌增长

一位科学家观察一个细菌种群。

在时间 $t = 0$ 小时时，有 $N = 50$ 个细菌。2 小时后，有 $N = 500$ 个细菌。4 小时后，有 $N = 5000$ 个细菌。

所以，这个种群每2 小时乘以因子10。一个模型是：

$$N(t) = 50 \cdot 10^{t/2},$$

其中 t 以小时为单位测量。

练习4

回答下面的问题。

- (a) 确认 $N(4) = 5000$ 。
- (b) 计算 $N(6)$ 。
- (c) 种群达到500,000 个细菌需要多少小时？
- (d) 在12 小时内，种群会增加多少倍？

解答

(a)

$$N(4) = 50 \cdot 10^{4/2} = 50 \cdot 10^2 = 50 \cdot 100 = 5000.$$

(b)

$$N(6) = 50 \cdot 10^{6/2} = 50 \cdot 10^3 = 50 \cdot 1000 = 50,000.$$

(c) 求解 $500,000 = 50 \cdot 10^{t/2}$ 。两边除以50，得到 $10,000 = 10^{t/2}$ 。因为 $10,000 = 10^4$ ，所以 $t/2 = 4$ ，因此 $t = 8$ 小时。

(d)

$$N(12) = 50 \cdot 10^{12/2} = 50 \cdot 10^6 = 50,000,000.$$

与起始值50 相比，这增加了

$$\frac{50,000,000}{50} = 1,000,000$$

倍。

3.3 药水商人

想象你是一位伟大的英雄，你去找药水商人，请他帮助你战斗。药水商人给你一瓶会让你变强的药水。但是有一条规则：你喝下药水时，它会让你变强10 倍，但之后每过一小时，你都会变弱一半，直到你恢复到正常力量（之后我们假设你保持在正常力量）。

一个描述有效药水效果的简单衰减模型是：

$$S(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t,$$

其中 t 以小时为单位测量。这里 $S(t)$ 表示药水仍然有效时你相对于正常状态的力量。（所以 $S = 1$ 对应于“正常力量”；一旦模型下降到1，我们就把它解释为药水效果已经消失。）

练习5

回答下面的问题。

- (a) 2 小时后，你的力量是多少？
- (b) 在什么时候，你会感觉比平时强1.25 倍？
- (c) 30 分钟后，你会感觉有多强？

解答

(a)

$$S(2) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2.5.$$

所以你会感觉强了2.5 倍。

(b) 求解 $1.25 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 。两边除以10，得到

$$0.125 = \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

现在 $0.125 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ，所以 $t = 3$ 小时。

(c) 30 分钟是0.5 小时。那么

$$S(0.5) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0.5} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{10}{1.4142} \approx 7.07.$$

所以30 分钟后，你会感觉大约强了7.07 倍。