

MAT220 第10讲：正态分布

目录

1	什么是正态分布?	2
1.1	离散型随机变量与连续型随机变量	2
1.2	关于极限的一个比喻	2
1.3	极限过程	3
1.4	正态分布与正态曲线	3
1.5	数学描述	4
2	标准正态分布	5
2.1	z -分数	5
2.2	标准正态分布	6
2.3	为什么标准正态分布有用	7
3	面积与概率	7
3.1	从柱子的高度到面积	7
3.2	如何求面积	8
3.3	理解面积	8
3.4	计算其他正态分布中的概率	9
3.5	68-95-99.7 法则	10
3.6	练习：标准正态曲线下的面积	10
3.7	练习：日本男性身高	11
4	附录：z-分数表	13

在前面的课程中，我们学习了描述统计、概率论、条件概率和二项分布。在本讲中，我们学习最著名的连续型概率分布：正态分布。我们将学习什么是正态曲线，什么是标准正态分布，以及 z -分数如何帮助我们在不同的正态分布之间转换。我们还将学习为什么连续变量的概率是用曲线下的面积来衡量，而不是用柱子的高度来衡量。下一讲我们将继续学习正态分布。

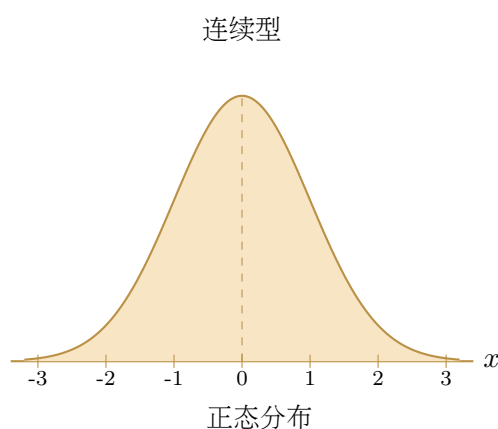
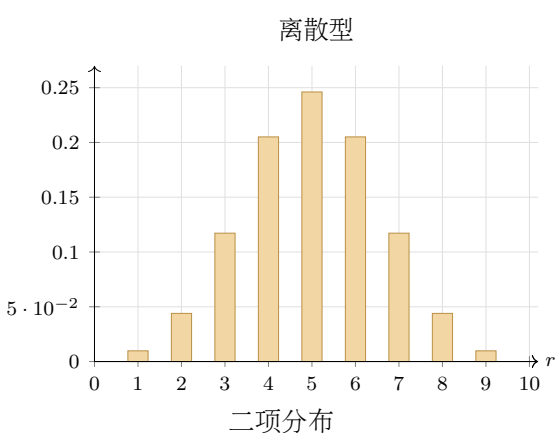
1 什么是正态分布？

1.1 离散型随机变量与连续型随机变量

回忆一下，随机变量是指其取值由偶然性决定的变量。正如我们在第6讲中看到的，随机变量主要有两种类型：

- **离散型随机变量**，可以取像 $0, 1, 2, 3, \dots$ 这样彼此分开的值；
- **连续型随机变量**，可以取某个区间内的任意实数值。

在第8讲中，我们学习了由离散型随机变量构成的概率分布，也就是二项分布。今天我们转向由连续型随机变量构成的概率分布。



连续型概率分布比我们目前见过的离散型分布有更多结构。这意味着有更多内容需要讨论，因此它们也可能比二项分布更容易让人困惑。因此，我们的策略是利用极限，把连续型情况和我们已经知道的内容联系起来。

1.2 关于极限的一个比喻

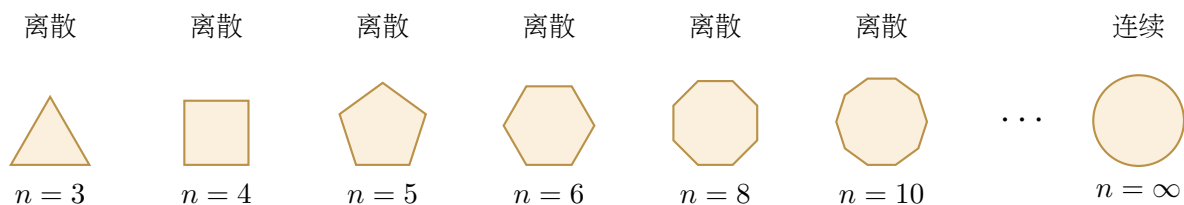
假设我们有一堆横截面形状不同的木头：



对于第一根木头来说，三角形的横截面会使它非常难滚动。如果我们换到下一根横截面为正方形的木头，就会发现它稍微容易滚动一些。之后，我们会发现横截面为五边形的木头更容易滚动，而横截面为六边形的木头又更容易滚动。我们会注意到，随着横截面边数的增加，木头变得越来

越容易滚动。当然，完全圆形的木头是最容易滚动的。

如果我们有很多很多根木头，并不断增加边数，就会得到一个看起来类似下面这样的木头序列：

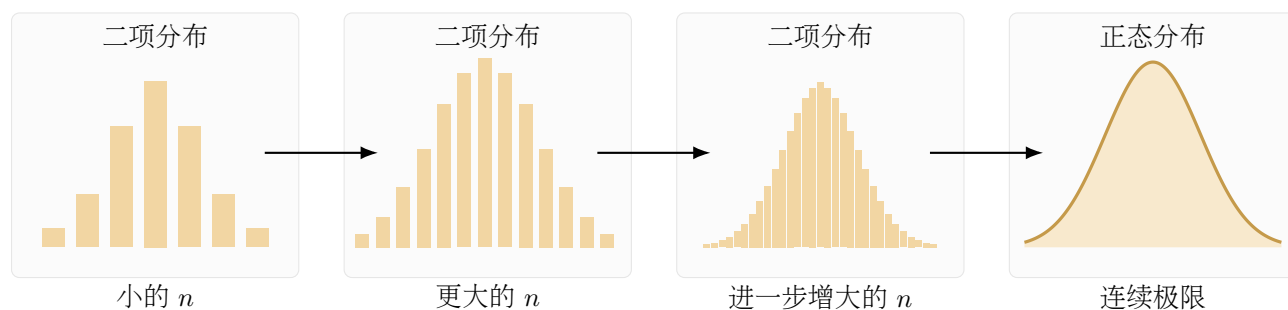


这个过程的极限将是一个圆，我们可以把圆看作具有无穷多条边的图形。如果我们把边数解释为一个离散量，那么在不断增加边数的过程中，多边形在极限中趋近于一个连续图形。

1.3 极限过程

滚动木头这个比喻背后有一个更深的思想，也可以应用到随机变量上：我们可以考虑一系列二项分布，其中试验次数不断增加，因此柱子的数量也不断增加，从而“接近”一个正态分布。换句话说，连续曲线可以被描述为许多离散柱子的极限。

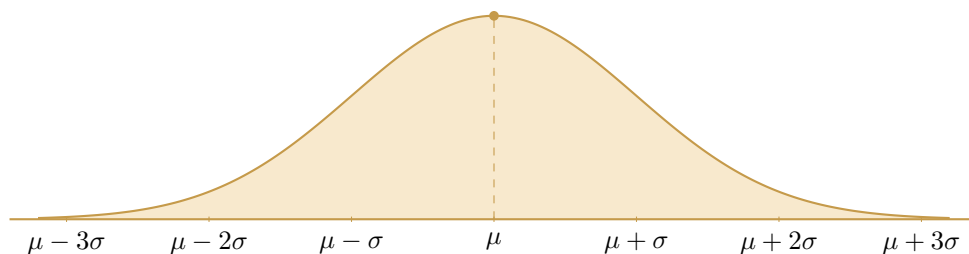
回忆一下，在二项分布中，图中柱子的总数是 $n + 1$ ，因为可能的取值从 0 到 n 。随着 n 增加，二项分布中的柱子变得更细，数量也更多。整体分布看起来越来越平滑，最终开始像一条曲线：



这个极限中出现的钟形曲线称为正态分布。值得一提的是，这种极限思想在数学中由一个严谨的结果来形式化，这个结果称为德莫弗-拉普拉斯定理。这里有一些重要的技术细节，但我们将在下一讲中讨论它们。

1.4 正态分布与正态曲线

正态密度函数的图像有时称为正态曲线，或者因为其形状而简称为钟形曲线。



正态分布是统计学中最重要的对象之一。在实际中，我们会在人类特征、物理测量、工业数据、测量误差以及许多其他情境中看到正态分布。

正态分布有几个重要特征。

正态分布的重要性质

1. 曲线呈钟形，最高点位于平均数 μ 的上方。
2. 曲线关于通过 μ 的竖直线对称。
3. 曲线的两端尾部接近水平轴，但永远不会接触或穿过水平轴。
4. 整条曲线下的总面积为 1。

1.5 数学描述

由于正态分布由图像表示，我们可以问：它对应的函数是什么？这个函数有一个特殊名称，称为正态密度函数。虽然我们不需要直接使用这个函数，但它写作：

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

尽管这个函数看起来显然很复杂，但我们应当注意几个重要点。首先，这个函数只有一个变量 x 。这个 x 就是成为图像横轴的连续型随机变量。其次，除了 x 之外，函数 $f(x)$ 还需要两个重要的数作为参数：

- μ 是分布的平均数。
- σ 是分布的标准差。

从上面的函数可以看出， μ 和 σ 是函数中唯一额外的信息，当然像 π 这样的常数除外。因此，每一个正态分布都完全由 μ 和 σ 这两个数刻画。这意味着，不同的 μ 和 σ 会给出不同的正态曲线。因此，我们经常把正态分布写成：

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

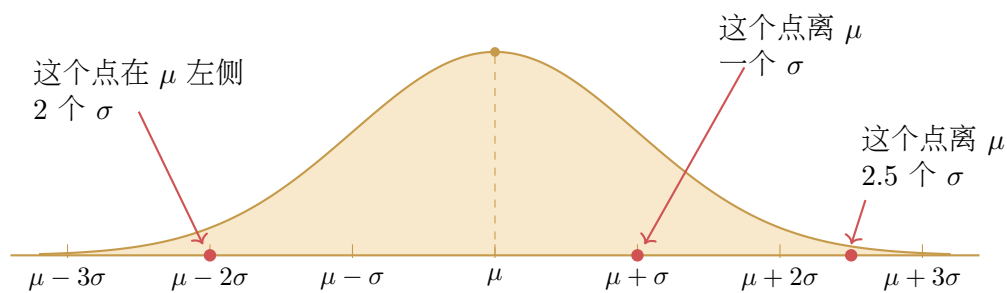
这句话应读作：“连续型随机变量 X 服从平均数为 μ 、方差为 σ^2 的正态分布。”

这是正态分布的一个相当特殊的性质。总体平均数 μ 告诉我们分布的中心在哪里，而总体标准差 σ 衡量数据分散的程度。通常，这两个数只是帮助描述数据集的数值。然而，在正态分布的情况下， μ 和 σ 完全描述了整个分布。因此，为了理解并使用这条曲线，我们只需要 μ 和 σ 这两个符号所表示的信息。

2 标准正态分布

2.1 z-分数

根据目前的讨论，我们看到任意正态分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的 x -轴都可以用 μ 和 σ 来描述。如果我们随机选择随机变量 X 的一个值，那么这个值会落在 x -轴上的某个位置。由于 x -轴以 μ 为中心，并以 σ 为单位来度量，我们可以用它离中心的距离来描述这个值的位置。例如：



z -分数，也称为标准分数，把这些信息变成一个纯粹的数字，它告诉我们一个测量值离平均数有多少个标准差。

z -分数的定义

如果 x 是来自平均数为 μ 、标准差为 σ 的正态分布的一个值，那么它的 z -分数为

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

这个公式可以逐部分解释：

- $x - \mu$ 衡量 x 离平均数有多远；
- 除以 σ 会把这个距离转化为标准差的个数；
- 结果可以是正数，也可以是负数，分别对应平均数的右侧或左侧。

例如，在上图中：

- 位于 $\mu - 2\sigma$ 的点的 z -分数是 -2 ；
- 位于 $\mu + \sigma$ 的点的 z -分数是 1 ；
- 位于 $\mu + 2.5\sigma$ 的点的 z -分数是 2.5 。

有时我们知道 z -分数，并想恢复原始值 x 。从公式

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

开始，我们可以变形得到：

$$x = \mu + z\sigma.$$

z -分数和原始值包含相同的信息，只是用两种不同的方式表示。

练习: z -分数与原始值

设

$$X \sim \mathcal{N}(10, 2^2),$$

所以 $\mu = 10$, $\sigma = 2$ 。

- (a) 值 $x = 12$ 离平均数有多少个 σ ?
- (b) 值 $x = 4$ 离平均数有多少个 σ ?
- (c) 离平均数 $+2\sigma$ 的 x 值是多少?

解答

(a)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 10}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

所以 $x = 12$ 比平均数高 1 个标准差。

(b)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{4 - 10}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

所以 $x = 4$ 比平均数低 3 个标准差。

(c) 如果 x 离平均数 $+2\sigma$, 那么 $z = 2$ 。因此

$$2 = \frac{x - 10}{2}.$$

变形得

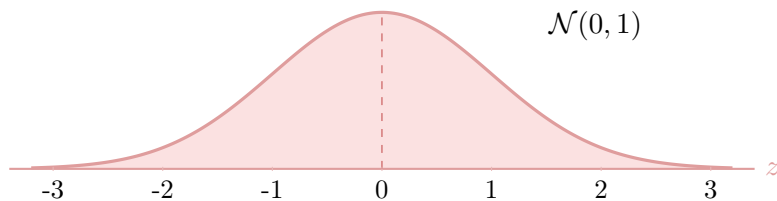
$$x = 2 \cdot 2 + 10 = 14.$$

2.2 标准正态分布

标准正态分布是平均数为 0、标准差为 1 的正态分布。我们通常写作

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

注意, 我们用特殊字母 Z 表示标准正态随机变量, 而不是之前使用的字母 X 。按照约定, 我们会用 **红色** 画出标准正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$, 以便在视觉上把它和一般正态分布区分开。标准正态分布如下图所示。



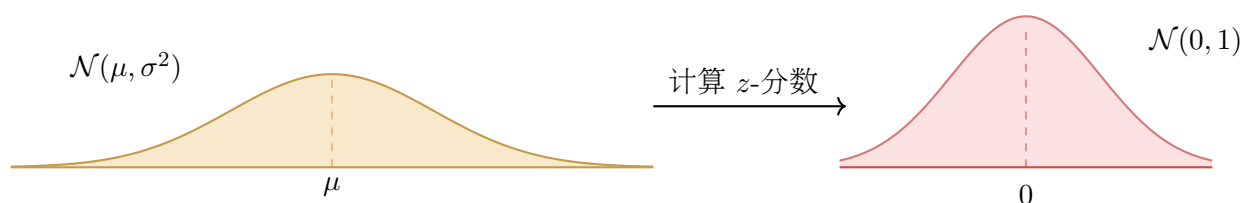
观察这里的横轴: 中心在 0, 并且我们以 1 为单位向上或向下计数。

2.3 为什么标准正态分布有用

任意正态分布都可以通过把测量值转化为 z -分数来转换为标准正态分布。这就是标准正态分布如此重要的原因：我们不需要为每一条可能的正态曲线学习不同的面积表，而是使用一条通用的参考曲线。

核心理念

每一个正态分布都可以被转换到标准正态分布的世界中。一旦完成转换，概率就可以从同一张标准正态面积表中读出。



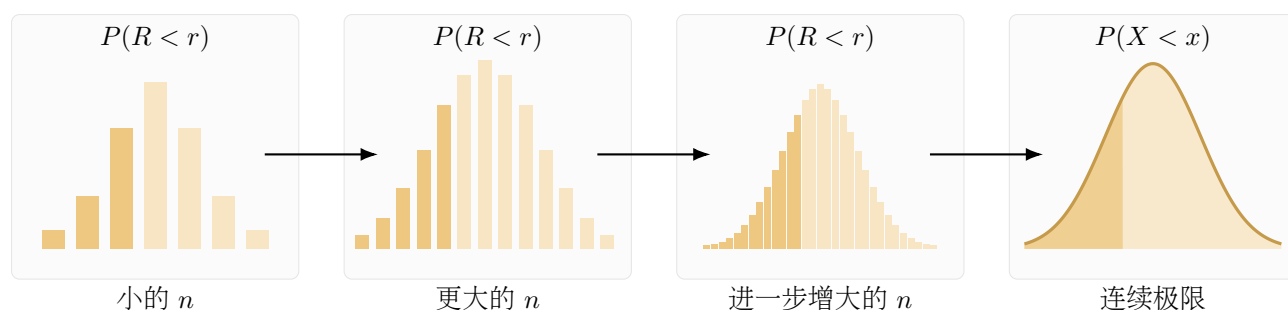
3 面积与概率

3.1 从柱子的高度到面积

当我们处理二项分布时，每根柱子的高度给出了离散型随机变量取该值的准确概率。例如，在 $n = 10$ 、 $p = 0.5$ 的二项分布中：

- 恰好 $r = 5$ 的概率就是 $r = 5$ 处柱子的高度，大约为 0.24；
- $r < 5$ 的概率通过把 $r = 0, 1, 2, 3, 4$ 处柱子的高度相加得到，大约为 0.38。

当 n 越来越大时，这种把许多细柱子相加的过程会越来越像连续面积：



如上图所示，对于连续型随机变量，我们把概率理解为曲线下的面积，而不是柱子高度的和。这是今天这讲的主要概念转变。

离散型概率与连续型概率

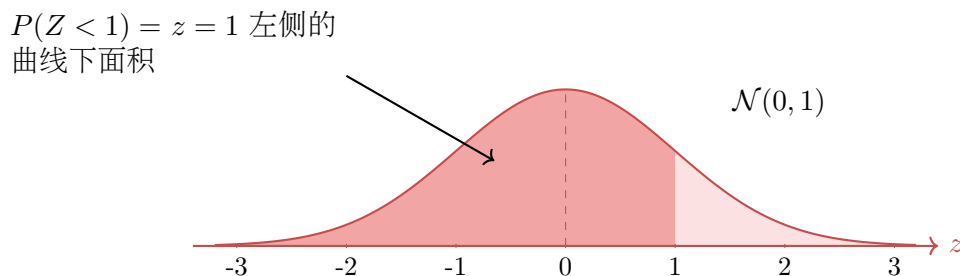
- 对于离散型随机变量，概率 $P(X < x)$ 通过把各个结果的概率相加来求得。
- 对于连续型随机变量，概率 $P(X < x)$ 通过测量曲线下的面积来求得。

3.2 如何求面积

再次考虑标准正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ 。根据上面的讨论，当我们写

$$P(Z < z),$$

时，它表示标准正态曲线下、点 z 左侧的面积。例如，概率 $P(Z < 1)$ 由下面的阴影面积给出：



如果你学过一些微积分，就会记得曲线下的面积可以通过积分求得。严格来说，我们需要在两个端点之间对定义 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的函数进行积分：

$$P(Z < z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

然而，这通常很难手算，所以实际中我们常用 z -表。我们可以把 z -表看作是标准正态分布中常见区域答案的一张列表。下面给出一个简化版的 z -表。

z	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$P(Z < z)$	0.02	0.07	0.16	0.31	0.50	0.69	0.84	0.93	0.98

这里，第二行给出了特定 z 值左侧的面积。例如，在上图中，表告诉我们阴影面积是 0.84，这意味着曲线下总面积的 84% 位于 $z = 1$ 的左侧。用概率语言来说，这表示随机变量 Z 取小于 1 的值的概率大约是 84%。

当然，上面的表只适用于从 -2.0 到 2.0 的 9 个特定 z 值。在本课程中，我们还会使用下面附录中的左尾 z -表。这是一张更复杂的表，它给出了 z 值精确到小数点后两位时，对应于 $Z < z$ 的面积。如果没有这张较大的表，一些计算器也可以使用特定函数来求出 $P(Z < z)$ 的准确值。

3.3 理解面积

z -表列出了标准正态随机变量 Z 的标准正态曲线下面积。我们把这个表解释为概率

$$P(Z < z),$$

的近似答案，也就是 z 左侧的面积。利用正态分布的基本性质，我们也可以用这张表描述其他面积。

如何求其他面积

- z 左侧的面积: 直接读出 $P(Z < z)$ 。
- z 右侧的面积: 使用 $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$ 。
- 两个值之间的面积: 使用 $P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$ 。
- 负值: 由对称性, 对于 $a > 0$,

$$P(Z < -a) = 1 - P(Z < a).$$

对于连续型随机变量, 任何单个精确点的概率都是零。例如,

$$P(Z = 0.5) = 0.$$

我们强调, 这并不意味着数值 0.5 是不可能的。它的意思是, 精确的一点 0.5 没有宽度, 因此在曲线下占据的面积为零。正的概率会在我们考虑区间时出现, 例如 $0.45 < Z < 0.55$, 因为区间具有非零宽度, 所以在曲线下占据非零面积。

3.4 计算其他正态分布中的概率

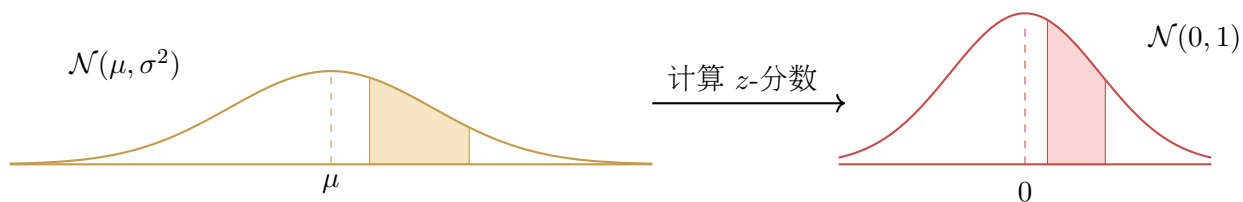
在第2节中, 我们提到可以使用 z -分数公式

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

把任意正态分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 转换为标准正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ 。这里有用的是, 这个转换过程也保持面积比例, 因此我们可以使用 z -分数和上面的 z -表来确定 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 中的概率。对于随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 有:

$$P(X < x) = P\left(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

换句话说, 要确定 $P(X < x)$ 的值, 只需计算点 x 的 z -分数, 然后在上面的 z -表中查找对应的面积即可。这个想法也适用于所有其他面积。例如, 像 $P(x_1 < X < x_2)$ 这样的概率, 也可以用 x_1 和 x_2 的 z -分数同样确定:



这正是 z -分数的真正威力: 它让我们可以用标准正态表处理任意正态分布。

例题

设 $X \sim \mathcal{N}(10, 2^2)$ 。求随机选出的一个值位于 11 和 14 之间的概率。用符号表示, 就是求 $P(11 \leq X \leq 14)$ 。

解答

第1步：把 x -值转换为 z -值。

$$z_1 = \frac{11 - 10}{2} = 0.5, \quad z_2 = \frac{14 - 10}{2} = 2.0.$$

第2步：从表中读出左尾面积。

$$P(Z < 0.5) = 0.69, \quad P(Z < 2.0) = 0.98.$$

第3步：相减得到区间概率。

$$P(11 \leq X \leq 14) = P(Z < 2.0) - P(Z < 0.5) = 0.98 - 0.69 = 0.29.$$

所以概率为

$$0.29.$$

用文字表示，从这个正态模型中随机选出的一个值位于 11 和 14 之间的概率约为 29%。

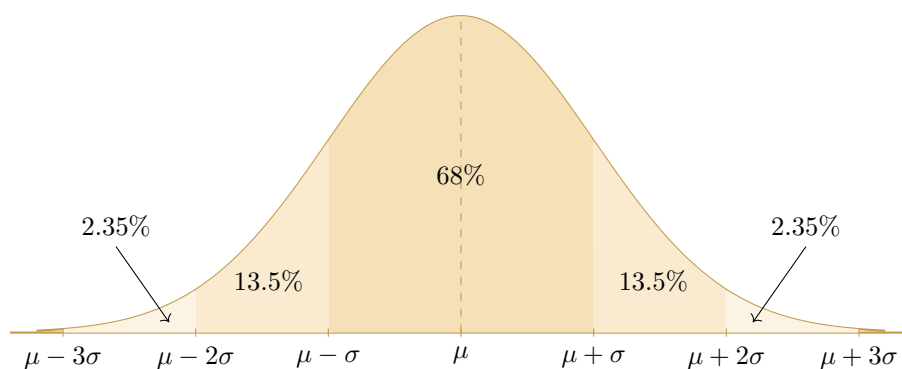
3.5 68-95-99.7 法则

对于正态分布，标准差为数据提供了一个非常有用的几何指导。

经验法则

对于正态分布：

- 约 68% 的数据落在平均数左右 1 个标准差以内；
- 约 95% 的数据落在平均数左右 2 个标准差以内；
- 约 99.7% 的数据落在平均数左右 3 个标准差以内。



剩下的 0.3% 位于两个极端尾部中，每个尾部约占 0.15%。

3.6 练习：标准正态曲线下的面积

使用上面的简化 z -表和对称性，求下列面积。

练习

- (a) 求 $z = -1.00$ 左侧的面积。
- (b) 求 $z = 1.5$ 左侧的面积。
- (c) 不使用 z -表, 求 $z = 0$ 左侧的面积。
- (d) 不使用 z -表, 求整条曲线下方的面积。
- (e) 求 $z = 1$ 右侧的面积。
- (f) 求区间 $-1 < Z < 1.5$ 的面积。
- (g) 求 $P(Z = 0.5)$ 。

解答

- (a) 由表可得,

$$P(Z < -1.00) = 0.16.$$

- (b) 由表可得,

$$P(Z < 1.5) = 0.93.$$

- (c) 由对称性可知, 总面积的一半在 0 的左侧, 所以

$$P(Z < 0) = 0.50.$$

- (d) 曲线下的总面积总是 1。

- (e)

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.84 = 0.16.$$

- (f)

$$P(-1 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -1).$$

使用表,

$$P(-1 < Z < 1.5) = 0.93 - 0.16 = 0.77.$$

- (g) 因为单个精确值的面积为零,

$$P(Z = 0.5) = 0.$$

3.7 练习: 日本男性身高

日本男性身高可以用平均数 $\mu = 171$ cm、标准差 $\sigma = 5.6$ cm 的正态分布来建模。假设随机选择一名日本男性。

练习

设

$$X \sim \mathcal{N}(171, 5.6^2).$$

- (a) 被选中的日本男性高于 176.6 cm 的概率是多少?
- (b) 被选中的日本男性身高恰好为 176.6 cm 的概率是多少?

解答

(a) 首先计算 z -分数:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{176.6 - 171}{5.6} = \frac{5.6}{5.6} = 1.$$

因此,

$$P(X > 176.6) = P(Z > 1).$$

由 z -表可知 $P(Z < 1) = 0.84$, 所以

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.84 = 0.16.$$

因此,

$$P(X > 176.6) = 0.16.$$

所以, 被选中的日本男性高于 176.6 cm 的概率约为 16%。

(b) 由于 X 是连续型随机变量, 取某一个精确值的概率为零:

$$P(X = 176.6) = 0.$$

4 附录: z -分数表

标准正态分布: 负 z -值对应的 $P(Z < z)$ (从 -3.99 到 0.00)

z	-.00	-.01	-.02	-.03	-.04	-.05	-.06	-.07	-.08	-.09
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
-1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
-0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
-0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
-0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

标准正态分布：正 z -值对应的 $P(Z < z)$ (从 0.00 到 3.99)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997