

MAT220 講義10：正規分布

目次

1	正規分布とは何か	2
1.1	離散型確率変数と連続型確率変数	2
1.2	極限についての比喻	2
1.3	極限の過程	3
1.4	正規分布と正規曲線	3
1.5	数学的な記述	4
2	標準正規分布	5
2.1	z -スコア	5
2.2	標準正規分布	6
2.3	なぜ標準正規分布が有用なのか	7
3	面積と確率	7
3.1	棒の高さから面積へ	7
3.2	面積はどのように求めるか	8
3.3	面積の理解	9
3.4	他の正規分布における確率の計算	9
3.5	68-95-99.7 ルール	10
3.6	標準正規曲線の下での面積に関する練習問題	11
3.7	練習問題：日本人男性の身長	12
4	付録：z-スコア表	14

これまでの講義では、記述統計、確率論、条件付き確率、そして二項分布を学んできた。この講義では、最も有名な連続型確率分布である正規分布を学ぶ。正規曲線とは何か、標準正規分布とは何か、そして z -スコアによって異なる正規分布の間をどのように行き来できるのかを学ぶ。また、連続変数に対する確率が、棒の高さではなく、なぜ曲線の下での面積によって測られるのかも学ぶ。次回の講義では、正規分布の学習を続ける。

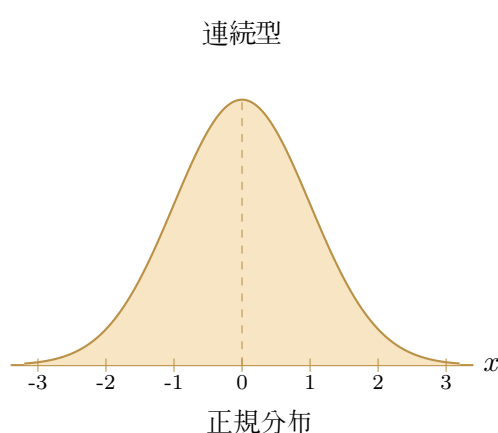
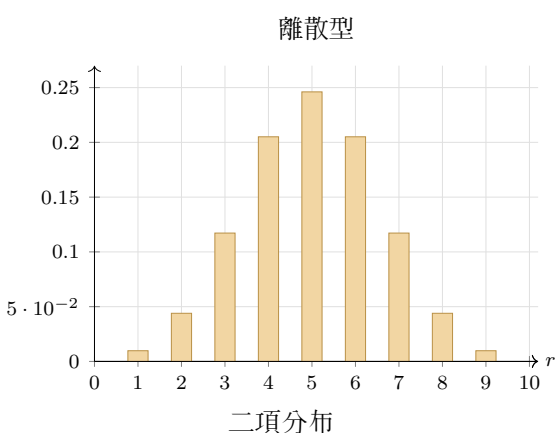
1 正規分布とは何か

1.1 離散型確率変数と連続型確率変数

確率変数とは、その値が偶然によって決まる変数のことであった。講義6で見たように、確率変数には主に二つの種類がある。

- **離散型確率変数**：0, 1, 2, 3, ... のように、飛び飛びの値を取ることができるもの。
- **連続型確率変数**：ある区間内の任意の実数値を取ることができるもの。

講義8では、離散型確率変数から作られる確率分布、すなわち二項分布を学んだ。今日は、連続型確率変数から作られる確率分布へ進む。



連続型確率分布には、これまで見てきた離散型分布よりも多くの構造がある。つまり、話すべきことが多く、そのため二項分布よりも混乱しやすい可能性がある。そこで、私たちの方針は、すでに知っているものと極限を使って結びつけながら、連続型の場合を学ぶことである。

1.2 極限についての比喻

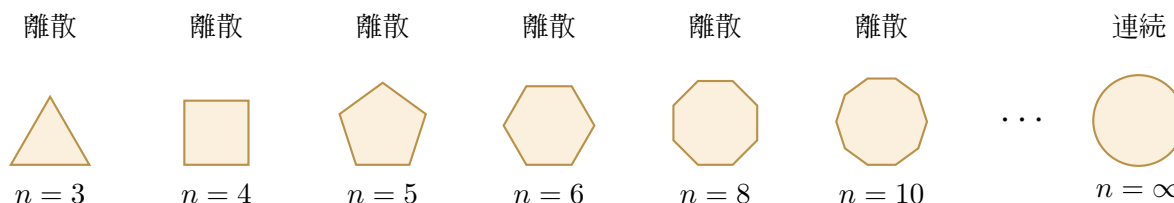
いろいろな形の断面を持つ丸太があるとしよう。



最初の丸太の場合、断面が三角形なので、転がすのはかなり難しい。次に、断面が正方形の丸太に移ると、少し転がしやすくなることに気づくだろう。その後、五角形の断面を持つ丸太はさらに転がしやすく、六角形の断面を持つ丸太はさらに転がしやすいことに気づく。断面の辺

の数が増えるにつれて、丸太はどんどん転がしやすくなる。もちろん、完全な円形の丸太が最も転がしやすい。

もし非常に多くの丸太があり、辺の数を増やし続けるなら、次のような丸太の列が得られる。

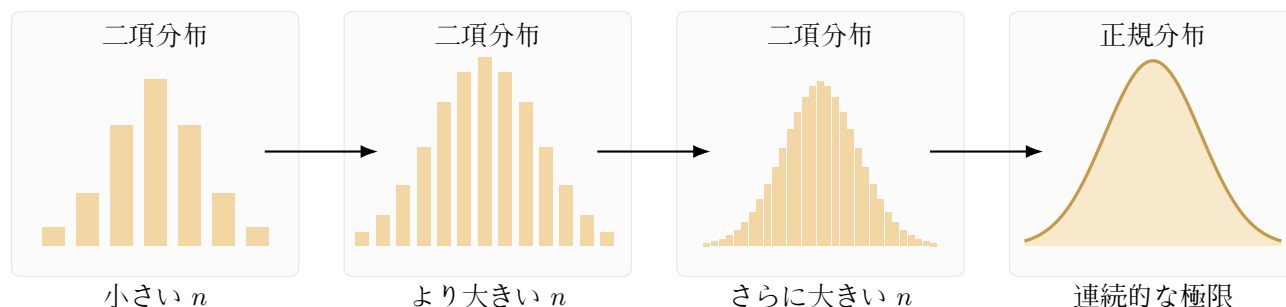


この手続きの極限は円になる。円は、辺が無限に多い図形だと考えることができる。辺の数を離散的な量だと解釈すると、辺を増やしていく過程で、多角形が極限において連続的な図形に近づくことがわかる。

1.3 極限の過程

丸太を転がすという比喻には、確率変数にも応用できるより深い考え方がある。試行回数を増やし、したがって棒の数を増やしていく二項分布の列を考えることで、正規分布に「近づく」ことができる。言い換えると、連続的な曲線は、多くの離散的な棒の極限として説明することができる。

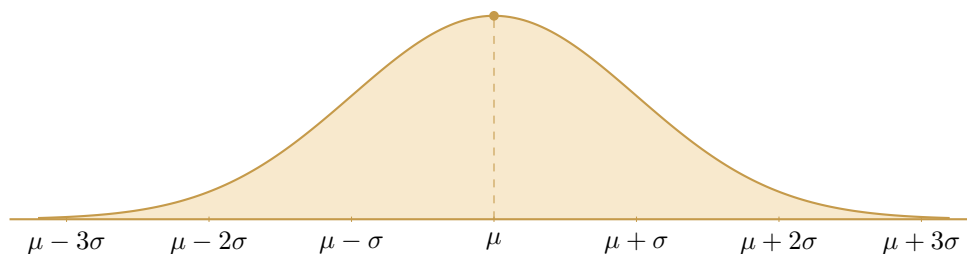
二項分布では、グラフの棒の総数は $n+1$ であることを思い出そう。これは、可能な値が 0 から n までだからである。 n が増えるにつれて、二項分布の棒は細くなり、数も多くなる。分布全体はだんだん滑らかに見えるようになり、最終的には曲線に似てくる。



この極限として現れる釣鐘型の曲線を正規分布という。なお、この極限の考え方は、数学ではド・モアブル-ラプラスの定理として知られる厳密な結果によって形式化されている。重要な技術的な点がいくつかあるが、それらは次回の講義で扱う。

1.4 正規分布と正規曲線

正規分布の密度関数のグラフは、その形から正規曲線、または単に釣鐘曲線と呼ばれることがある。



正規分布は、統計学において最も重要な対象の一つである。実際には、人間の特徴、物理的な測定値、工業データ、測定誤差、その他多くの場面で正規分布が現れる。

正規分布には、いくつかの重要な特徴がある。

正規分布の重要な性質

1. 曲線は釣鐘型であり、最も高い点は平均 μ の上にある。
2. 曲線は μ を通る垂直線に関して対称である。
3. 両端の裾は水平軸に近づくが、水平軸に触れたり交わったりしない。
4. 曲線全体の下面積は 1 である。

1.5 数学的な記述

正規分布はグラフによって表されるので、それに対応する関数は何かを問うことができる。この関数には特別な名前があり、正規密度関数と呼ばれる。この関数を直接扱う必要はないが、次のように書かれる。

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

この関数は一見かなり複雑だが、いくつか重要な点を確認しておこう。まず、この関数には一つの変数 x がある。この x は、グラフの横軸になる連続型確率変数である。次に、 x 以外に、この関数 $f(x)$ には二つの重要な数がパラメータとして必要である。

- μ は分布の平均である。
- σ は分布の標準偏差である。

上の関数からわかるように、 μ と σ は、この関数に含まれる追加情報のすべてである。ただし、もちろん π のような定数は除く。したがって、すべての正規分布は μ と σ という二つの数によって完全に特徴づけられる。つまり、 μ と σ の選び方を変えると、異なる正規曲線が得られる。このため、正規分布を次のように書くことが多い。

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

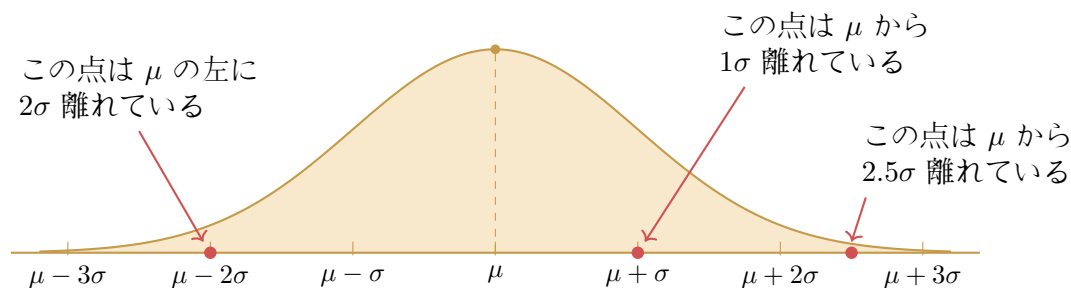
これは、「連続型確率変数 X は、平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従う」と読む。

これは正規分布のかなり特別な性質である。母平均 μ は分布の中心がどこにあるかを表し、母標準偏差 σ はデータがどれくらい散らばっているかの尺度である。通常、これらはデータセットを説明するための二つの数にすぎない。しかし、正規分布の場合、 μ と σ はその分布を完全に記述する。したがって、曲線を扱うために必要な情報は、記号 μ と σ だけである。

2 標準正規分布

2.1 z -スコア

ここまでの議論から、任意の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の x -軸は、 μ と σ によって説明できることがわかる。確率変数 X の値を一つランダムに選ぶと、その値は x -軸上のどこかに位置する。 x -軸は μ を中心とし、 σ を単位として測られているので、その値が中心からどれだけ離れているかを表すことができる。例えば、次のようになる。



z -スコアは、標準得点とも呼ばれ、この情報を純粋な数に変換する。つまり、ある測定値が平均から何個分の標準偏差だけ離れているかを表す。

z -スコアの定義

平均 μ 、標準偏差 σ の正規分布から得られる値を x とする。このとき、その z -スコアは

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

この式は、次のように一つずつ解釈できる。

- $x - \mu$ は、 x が平均からどれだけ離れているかを測る。
- σ で割ることで、その距離を標準偏差の個数として表す。
- 結果は正にも負にもなり得る。正なら平均の右側、負なら平均の左側を表す。

例えば、上の図では次のようになる。

- $\mu - 2\sigma$ にある点の z -スコアは -2 である。
- $\mu + \sigma$ にある点の z -スコアは 1 である。
- $\mu + 2.5\sigma$ にある点の z -スコアは 2.5 である。

ときには、 z -スコアがわかっていて、元の値 x を求めたいことがある。式

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

から始めると、これを变形して

$$x = \mu + z\sigma$$

を得る。 z -スコアと元の値は、同じ情報を二つの異なる形で書いたものである。

練習問題： z -スコアと元の値

$$X \sim \mathcal{N}(10, 2^2)$$

とする。つまり、 $\mu = 10$ 、 $\sigma = 2$ である。

- (a) 値 $x = 12$ は、 σ 何個分だけ離れているか。
- (b) 値 $x = 4$ は、 σ 何個分だけ離れているか。
- (c) 平均から $+2\sigma$ 離れた値 x は何か。

解答

(a)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 10}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

したがって、 $x = 12$ は平均より 1 標準偏差だけ上にある。

(b)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{4 - 10}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

したがって、 $x = 4$ は平均より 3 標準偏差だけ下にある。

(c) x が平均から $+2\sigma$ 離れているなら、 $z = 2$ である。したがって、

$$2 = \frac{x - 10}{2}.$$

これを变形すると、

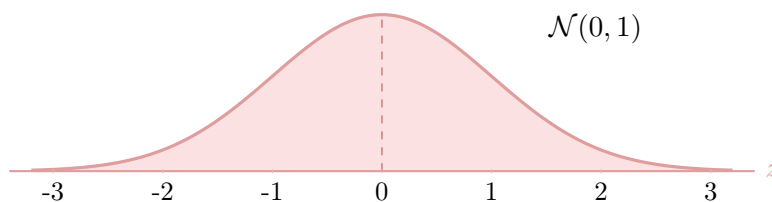
$$x = 2 \cdot 2 + 10 = 14.$$

2.2 標準正規分布

標準正規分布とは、平均が 0、標準偏差が 1 の正規分布である。通常、これを

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

と書く。標準正規確率変数には、前に使った X ではなく、特別に Z という文字を使うことに注意しよう。慣例として、一般の正規分布と視覚的に区別できるように、標準正規分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ は **赤** で描くことにする。標準正規分布は次のように表される。



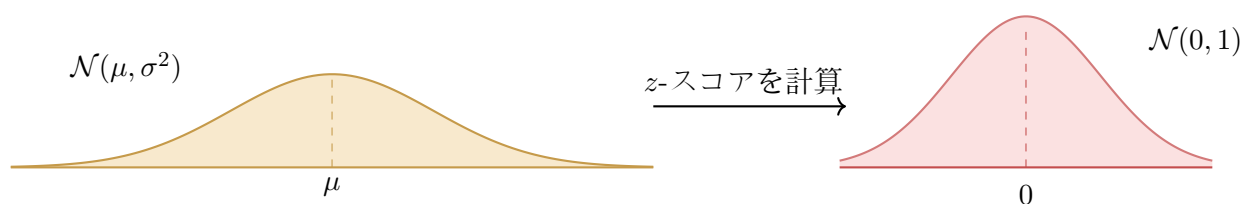
ここで横軸を見よう。中心は 0 であり、1 ずつ増減して数えている。

2.3 なぜ標準正規分布が有用なのか

任意の正規分布は、その測定値を z -スコアに変換することで、標準正規分布に変換できる。これが、標準正規分布がとても重要である理由である。可能なすべての正規曲線に対して別々の面積表を覚える代わりに、一つの普遍的な基準曲線を使えばよい。

大きな考え方

すべての正規分布は、標準正規分布の世界へ移すことができる。それができれば、確率は標準正規分布の面積表一つから読み取ることができる。



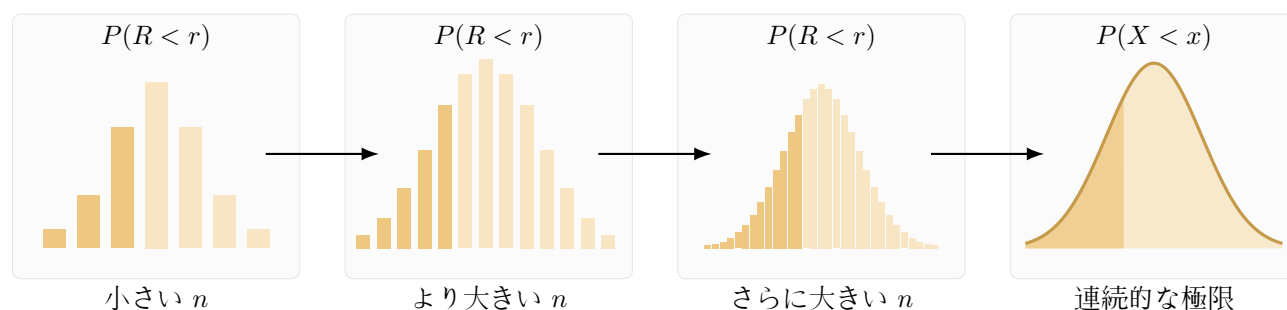
3 面積と確率

3.1 棒の高さから面積へ

二項分布を扱うとき、それぞれの棒の高さは、離散型確率変数とその値を取る正確な確率を表していた。例えば、 $n = 10$ 、 $p = 0.5$ の二項分布では、

- ちょうど $r = 5$ となる確率は、 $r = 5$ にある棒の高さであり、およそ 0.24 である。
- $r < 5$ となる確率は、 $r = 0, 1, 2, 3, 4$ にある棒の高さを足し合わせることで得られ、およそ 0.38 である。

n がどんどん大きくなると、多くの細い棒を足し合わせるこの過程は、連続的な面積にどんどん似てくる。



上の図が示しているように、連続型確率変数では、確率を棒の高さの和ではなく、曲線の下面積として考える。これが今日の講義の主要な概念的変化である。

離散型確率と連続型確率

- 離散型確率変数では、確率 $P(X < x)$ は、個々の結果の確率を足し合わせることで求められる。
- 連続型確率変数では、確率 $P(X < x)$ は、曲線の下面積を測ることで求められる。

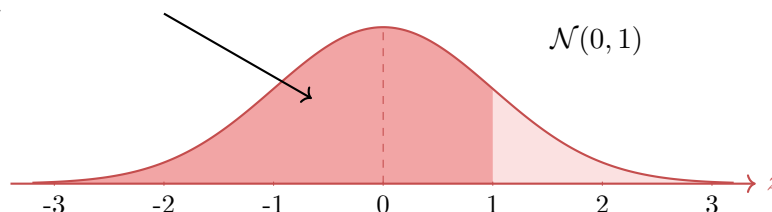
3.2 面積はどのように求めるか

標準正規分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ をもう一度考えよう。上の議論によれば、

$$P(Z < z)$$

と書くとき、これは標準正規曲線の下で、点 z の左側にある面積を意味する。例えば、確率 $P(Z < 1)$ は、次の影付き部分の面積で与えられる。

$P(Z < 1) = z = 1$ の左側の
曲線の下面積



微積分を知っていれば、このような面積は積分を使って求めることができる。厳密には、 $\mathcal{N}(0, 1)$ を定義する関数を二つの端点の間に積分する必要がある。

$$P(Z < z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

しかし、これは手で計算するのが難しいことが多いので、実際にはしばしば z -表を使う。 (z) -表は、標準正規分布のよく使う領域について、答えを一覧にしたものだと考えればよい。簡略化した z -表を下に示す。

z	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$P(Z < z)$	0.02	0.07	0.16	0.31	0.50	0.69	0.84	0.93	0.98

ここで、二行目は、特定の z の値に対して、その左側の面積を与えている。例えば、上の図では、表から影付き部分の面積が 0.84 であることがわかる。これは、曲線全体の下面積のうち 84% が $z = 1$ の左側にあるという意味である。確率の言葉で言えば、確率変数 Z が 1 より小さい値を取る確率がおよそ 84% である、ということである。

もちろん、上の表は、-2.0 から 2.0 までの 9 個の特定の z の値に対してしか使えない。この授業では、下の付録にある左側確率の z -表も使う。この表はずっと大きく、 z の値を小数第2位まで指定したときの $Z < z$ に対応する面積を与える。この大きな表がない場合でも、電卓の特定の機能を使えば、 $P(Z < z)$ の正確な値を求めることができる。

3.3 面積の理解

z -表は、標準正規確率変数 Z について、標準正規曲線の下での面積を一覧にしたものである。この表は、確率

$$P(Z < z)$$

に対する近似的な答え、つまり z の左側の面積を与えていると解釈する。正規分布の基本的な性質を使えば、この表を使って他の面積も表すことができる。

他の面積の求め方

- z の左側の面積： $P(Z < z)$ を直接読み取る。
- z の右側の面積： $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$ を使う。
- 二つの値の間の面積： $P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$ を使う。
- 負の値： 対称性により、 $a > 0$ に対して

$$P(Z < -a) = 1 - P(Z < a).$$

連続型確率変数では、一つの正確な点の確率はゼロである。例えば、

$$P(Z = 0.5) = 0.$$

これは、値 0.5 が不可能であるという意味ではないことを強調しておく。むしろ、正確な一点 0.5 は幅を持たず、そのため曲線の下での面積もゼロである、という意味である。正の確率が現れるのは、例えば $0.45 < Z < 0.55$ のような区間を考えるとときである。区間はゼロでない幅を持つので、曲線の下にゼロでない面積を占める。

3.4 他の正規分布における確率の計算

第2節で、 z -スコアの公式

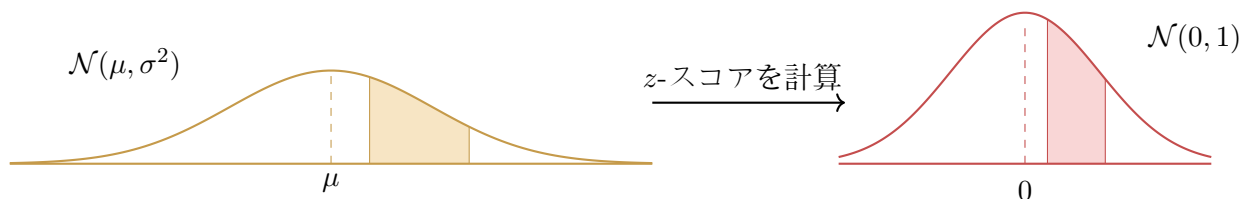
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

を使うことで、任意の正規分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ を標準正規分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ に変換できると述べた。ここで有用なのは、この変換が面積の割合も保つということである。つまり、 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ における確率を、 z -スコアと上の z -表を使って求めることができる。確率変数 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ に対して、

$$P(X < x) = P\left(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

が成り立つ。

言い換えると、 $P(X < x)$ の値を求めるには、点 x の z -スコアを計算し、その対応する面積を上記の z -表で調べればよい。この考え方は、他のすべての面積にも使える。例えば、 $P(x_1 < X < x_2)$ のような確率も、 x_1 と x_2 に対する z -スコアを使って同じように求められる。



これこそが z -スコアの本当の強みである。 z -スコアを使えば、任意の正規分布を標準正規表によって扱うことができる。

例題

$X \sim \mathcal{N}(10, 2^2)$ とする。ランダムに選ばれた値が 11 と 14 の間にある確率を求めよ。記号で書くと、 $P(11 \leq X \leq 14)$ を求めよ。

解答

ステップ1: x の値を z の値に変換する。

$$z_1 = \frac{11 - 10}{2} = 0.5, \quad z_2 = \frac{14 - 10}{2} = 2.0.$$

ステップ2: 表から左側の面積を読み取る。

$$P(Z < 0.5) = 0.69, \quad P(Z < 2.0) = 0.98.$$

ステップ3: 差を取って区間の確率を求める。

$$P(11 \leq X \leq 14) = P(Z < 2.0) - P(Z < 0.5) = 0.98 - 0.69 = 0.29.$$

したがって、確率は

$$0.29.$$

言葉で言えば、この正規モデルからランダムに選ばれた値が 11 と 14 の間にある確率は、およそ 29% である。

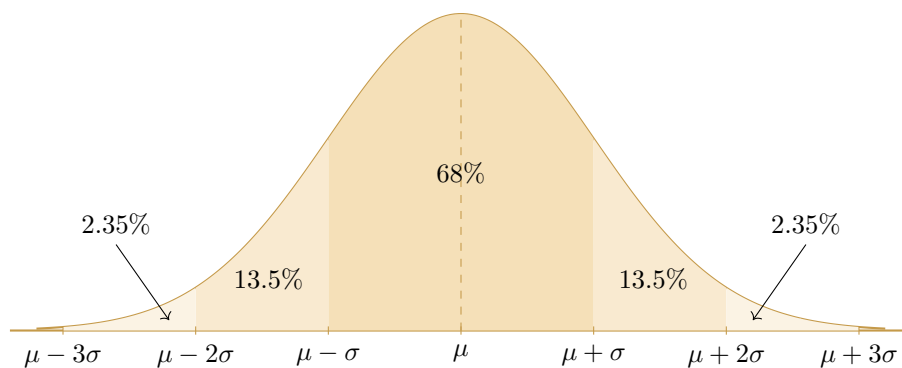
3.5 68-95-99.7 ルール

正規分布では、標準偏差がデータに対する非常に有用な幾何的な目安を与える。

経験則

正規分布では、

- データの約 68% は、平均から左右 1 標準偏差以内にある。
- データの約 95% は、平均から左右 2 標準偏差以内にある。
- データの約 99.7% は、平均から左右 3 標準偏差以内にある。



残りの 0.3% は二つの極端な裾にあり、それぞれの裾に約 0.15% ずつある。

3.6 標準正規曲線の下での面積に関する練習問題

上の簡略 z -表と対称性を使って、次の面積を求めよ。

練習問題

- (a) $z = -1.00$ の左側の面積を求めよ。
- (b) $z = 1.5$ の左側の面積を求めよ。
- (c) z -表を使わずに、 $z = 0$ の左側の面積を求めよ。
- (d) z -表を使わずに、曲線全体の下での面積を求めよ。
- (e) $z = 1$ の右側の面積を求めよ。
- (f) 区間 $-1 < Z < 1.5$ の面積を求めよ。
- (g) $P(Z = 0.5)$ を求めよ。

解答

(a) 表より、

$$P(Z < -1.00) = 0.16.$$

(b) 表より、

$$P(Z < 1.5) = 0.93.$$

(c) 対称性より、全体の面積の半分が 0 の左側にある。したがって、

$$P(Z < 0) = 0.50.$$

(d) 曲線全体の下での面積は常に 1 である。

(e)

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.84 = 0.16.$$

(f)

$$P(-1 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -1).$$

表を使うと、

$$P(-1 < Z < 1.5) = 0.93 - 0.16 = 0.77.$$

(g) 一つの正確な値は面積を持たないので、

$$P(Z = 0.5) = 0.$$

3.7 練習問題：日本人男性の身長

日本人男性の身長は、平均 $\mu = 171$ cm、標準偏差 $\sigma = 5.6$ cm の正規分布でモデル化できるとする。日本人男性を一人ランダムに選ぶとする。

練習問題

$$X \sim \mathcal{N}(171, 5.6^2)$$

とする。

(a) 選ばれた日本人男性が 176.6 cm より高い確率は何か。

(b) 選ばれた日本人男性の身長がちょうど 176.6 cm である確率は何か。

解答

(a) まず z -スコアを計算する。

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{176.6 - 171}{5.6} = \frac{5.6}{5.6} = 1.$$

したがって、

$$P(X > 176.6) = P(Z > 1).$$

z -表より $P(Z < 1) = 0.84$ であるから、

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.84 = 0.16.$$

よって、

$$P(X > 176.6) = 0.16.$$

したがって、選ばれた日本人男性が 176.6 cm より高い確率はおよそ 16% である。

(b) X は連続型確率変数なので、一つの正確な値を取る確率はゼロである。

$$P(X = 176.6) = 0.$$

4 付録： z -スコア表

標準正規分布：負の z に対する $P(Z < z)$ (−3.99 から 0.00 まで)

z	-.00	-.01	-.02	-.03	-.04	-.05	-.06	-.07	-.08	-.09
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
-1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
-0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
-0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
-0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

標準正規分布：正の z に対する $P(Z < z)$ (0.00 から 3.99 まで)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997