

MAT120: 论证 第16讲讲义

数学与金融

上节课我们学习了假设检验，其中使用了正态分布、抽样分布以及概率，来根据数据作出判断。在这一讲中，我们开始课程的一个新单元，讨论数学如何出现在货币、金融、不确定性和风险之中。目标并不是把你培养成银行家，而是要说明，课程前面学到的建模思想、概率工具和统计概念，都会在日常金融生活中再次出现。我们将从物物交换和货币的意义讲起，接着讨论百分比与利息，然后进入期望值、风险、波动性和分散投资。

1 什么是货币？

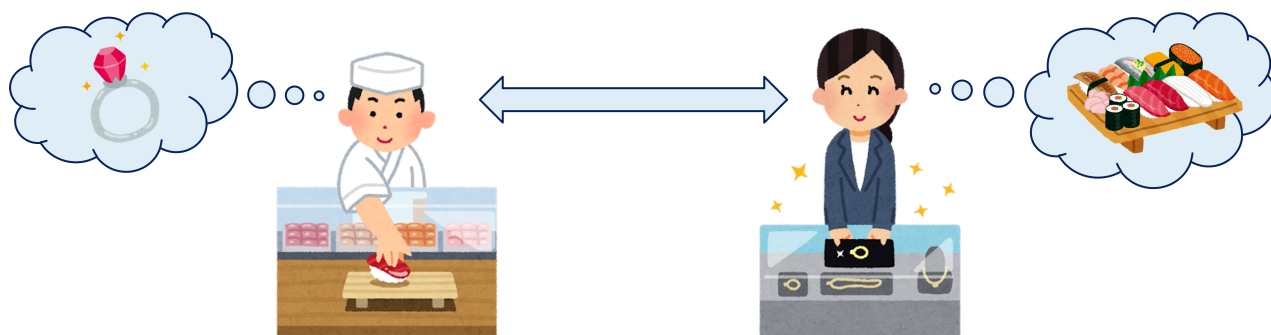
在讨论金融之前，首先值得问一问，货币实际上是什么。理解货币的一种常见方式，是把它看作对物物交换中出现问题的解决办法。在物物交换制度中，两个人直接交换物品，比如用面包换鱼，用工具换衣服，等等。起初这似乎很自然，但这个制度很快就会遇到实际困难。

1.1 物物交换的三个问题

物物交换经济至少面临三个重要问题。

问题1： 假设现在有两个人想进行物物交换。

- 一位寿司师傅想向自己的伴侣求婚，
- 还有一位正好会制作闪亮订婚戒指、而且肚子很饿的珠宝匠。



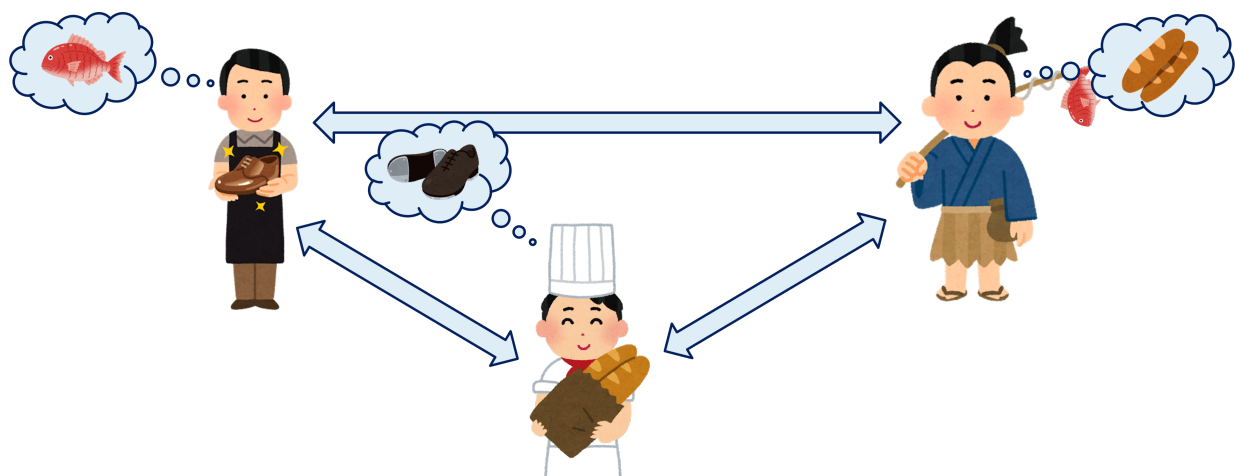
珠宝匠为了找吃的走进寿司店，而寿司师傅恰好提到自己正在寻找一枚闪亮的新戒指。师傅注意到珠宝匠正好有一枚多余的戒指，也注意到她看起来很饿。于是，他提出用一盘寿司换那枚戒指。他们会交换吗？答案是不会，因为那枚戒指显然比一盘寿司贵重得多。

物物交换的第一个问题

两个人可能会对自己的物品赋予不同的价值。如果其中一方认为某件物品远比另一方所认为的更有价值，那么交易就会失败。

问题2： 现在假设有三个人想进行交易：

- 一个需要面包的渔夫，
- 一个需要一双新鞋的面包师，
- 以及一个需要美味鲜鱼的鞋匠。

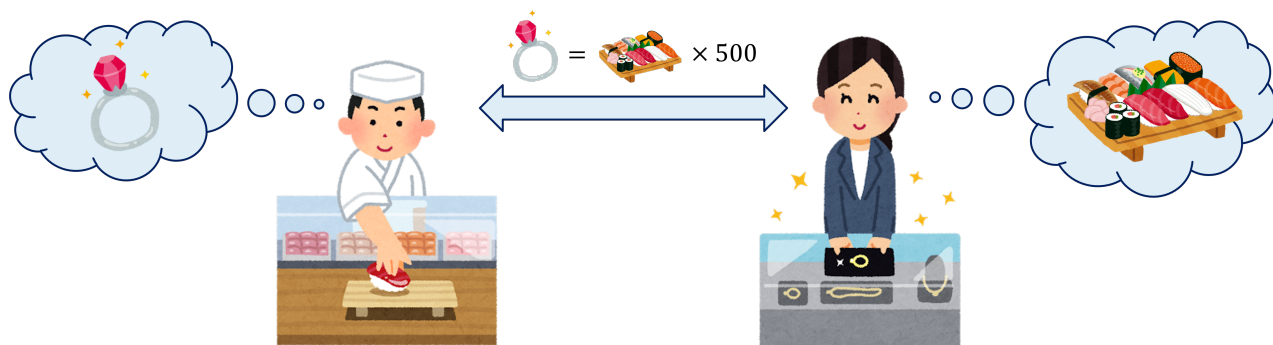


看起来这三个人似乎很容易完成交换，并且都能满意。然而，在现实中，他们很可能不会交易，因为每个人都必须在同一时刻想要下一个人手里的东西。

物物交换的第二个问题

当交易需要超过两个人参与时，物物交换就更难组织了。并不能保证一群人会在同一时刻都正好想要彼此拥有的东西。

问题3： 让我们回到寿司师傅和珠宝匠的例子。假设他们沟通之后，双方都同意，一枚闪亮的新戒指大约值500 盘寿司：



于是，寿司师傅提出用500 盘寿司交换这枚戒指。在这种情况下，他们仍然不会交易，因为虽然现在戒指的价值与寿司数量相匹配了，但珠宝匠还是意识到在两天之后寿司就会腐烂，因此变得毫无价值。这说明了物物交换的第三个问题。

物物交换的第三个问题

一个物品在别人心目中的价值会随着时间而变化。今天看起来合理的交易，到了明天可能就不再合理。

1.2 货币的功能

在许多方面，货币正是为了试图解决上面提到的这三个问题。

货币的三个核心功能

现代货币可以从三个主要方面来理解：

- **交换媒介：** 货币使人们能够进行间接交易。
- **记账单位：** 货币为价值提供了一种共同的数字语言。
- **价值储藏：** 货币能够在一段时间内保存购买力，至少大致如此。

一旦我们给物品赋予价格，物物交换就会更容易组织。我们不再问“一枚戒指是否“等于”一顿寿司晚餐”，而是转而问它们的价格是否相容。从这个意义上说，货币是一种量化价值的方式，尽管这种价值从来都不是完全客观的。

较早的社会使用的货币形式更为具体，比如硬币、贵金属、贝壳、谷物以及其他被普遍承认的物品。到了现代，货币变得抽象得多，而且我们的许多货币并不以实体现金的形式存在，而是以银行账户、数据库和数字系统中的抽象数字形式存在。但货币的根本功能并没有改变：货币仍然被用来储存和记录价值。

在这一讲中，把货币看作一种社会能量会很有帮助。它可以被储存、转移，并转换成其他形式。然而，与物理能量不同，货币并不是一种纯粹自然的量。现代货币可以由制度创造或消灭，它的意义依赖于社会信任、法律以及集体行为。货币作为一种社会实践，并不纯粹是数学的。

2 货币与增长

数学可以用来描述货币如何随着时间而变化。我们这里主要关注各种利息，但需要注意的是，数理金融涵盖的内容远远超过我们现在将看到的这些。我们先简单复习一下百分比。

2.1 百分比与一步变化

回忆一下，“percent”这个词的字面意思是“每一百”。因此：

$$25\% = \frac{25}{100} = 0.25.$$

如果某个价格按比率 r 上升，那么我们就乘以 $1 + r$ 。如果某个价格按比率 r 下降，那么我们就乘以 $1 - r$ 。因此：

$$\text{新值} = (\text{旧值})(1 \pm r).$$

例子。

- 一件标价\$120 的衬衫打五折后变为

$$120(1 - 0.5) = 120(0.5) = 60.$$

- 一栋价值\$200,000 的房子上涨10% 后变为

$$200,000(1 + 0.10) = 220,000.$$

一个常见的错误是认为，先下降20%，再上升20%，就会回到起点。其实不会，因为第二个百分比是作用在一个不同的基数上的。

例子：先打折再涨价

假设一台相机价格是\$1000，先打八折。那么：

$$1000(1 - 0.20) = 1000(0.8) = 800.$$

如果打折后的价格再上涨20%，新价格就是

$$800(1 + 0.20) = 800(1.2) = 960.$$

因此，这台相机不会回到原来的价格。下降20% 与上升20% 并不会互相抵消。

2.2 单利

利息处理的是货币的重复变化，而不是一次性的变化。第一种模型是单利。在这里，利息始终按原始本金 P 来计算。

如果年利率是 r ，时间是 t 年，那么总金额为

$$A = P(1 + rt).$$

这是一个线性模型，因为增长方式是每年增加同样的数量。

单利公式

$$A = P(1 + rt)$$

其中：

- P 是本金（起始金额），
- r 是用小数表示的年利率，
- t 是以年为单位的时间，
- A 是累积后的金额。

例题：单利计算

假设你以5% 的单利利率投资\$1000，持续5 年。那么

$$A = 1000(1 + 0.05 \cdot 5) = 1000(1.25) = 1250.$$

所以5 年后你将有\$1250。

2.3 复利

单利并不是现实银行或投资中最常见的模型。在复利 中，利息会被加入余额，之后的利息再按照新的余额来计算。这会产生指数型 增长：

$$A = P(1 + r)^t.$$

两者的差别在概念上非常重要。线性增长不断加上同样的量，而指数增长不断乘以同样的因子。

复利公式

$$A = P(1 + r)^t$$

这是最基本的按年复利模型。

例题：复利计算

假设你存入\$1000，年复利利率为10%。2 年后，

$$A = 1000(1.1)^2 = 1000(1.21) = 1210.$$

3 年后，

$$A = 1000(1.1)^3 = 1000(1.331) = 1331.$$

注意第三年增加的金额比第一年更多，因为此时账户余额已经更大了。

2.4 复利债务

复利增长不仅适用于储蓄，也适用于债务。例如，如果你欠钱，而放贷方把利息不断加到你的欠款之上，那么你所欠的金额也会呈指数增长。

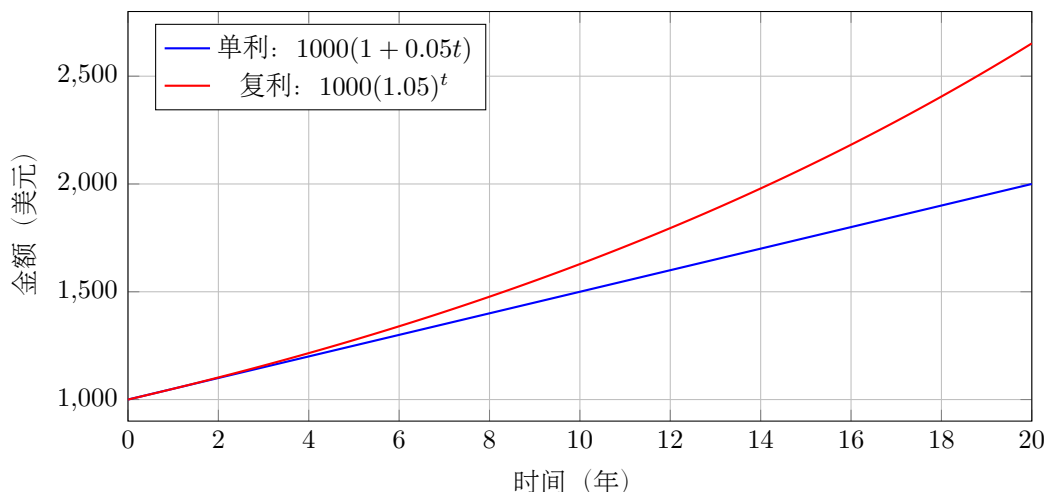
例题：复利债务计算

假设你借了\$10,000，年复利利率为5%，并且2 年内不做任何偿还。那么欠款金额为

$$A = 10,000(1.05)^2 = 10,000(1.1025) = 11,025.$$

所以2 年后你将欠\$11,025，而不是\$10,000。

单利和复利在一开始可能看起来差不多，但复利增长最终会拉开差距，因为它不断重复乘法。下面的图使用相同的起始金额和相同的增长率，但长期行为非常不同，这正是复利效应造成的。



2.5 一年复利多于一次

原则上，利息也可以按月、按周或按日这样更频繁地复利。如果每年复利 n 次，那么公式变成

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

复利越频繁，最终金额通常越大，因为余额更新得更频繁。

如果复利越来越频繁，我们就会遇到数学中最重要的数字之一，即 $e \approx 2.71828$ 。经典极限是

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.$$

这就是为什么指数函数和数字 e 会如此频繁地出现在金融、增长、通货膨胀以及许多其他现实系统之中。

连续复利。 当利息连续复利时，模型变成

$$A = Pe^{rt}.$$

这是复利增长最“平滑”的版本。

3 货币与不确定性

在上一节中，我们假设货币被置于某个可预测的增长系统之中。然而，现实里，货币会被用在许多不确定系统中，比如赌博、保险、金融投资等等。在这里，情况就不同了：我们并不能完全知道货币会随着时间发生什么。因此，这里存在不确定性，于是我们改用概率工具。这里使用的核心数学概念叫做期望值。

3.1 作为加权平均的期望值

期望值是随机情形下的长期平均结果。我们可以把它想象为一个概率系统，其中不同结果都附带相应的金钱收益或损失。期望值的计算方式是，把每个可能结果乘上它的概率，再把这些结果加起来。

期望值

如果随机变量 X 以概率 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 取值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，那么

$$EV(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

这其实就是一个加权平均，公式与数据集的平均值非常相似。需要注意的是，期望值并不是对单次试验必定会发生什么的预测。相反，它是如果实验重复很多次，我们所期望看到的平均结果。

3.2 金钱游戏的期望值

假设你去赌场玩下面这个游戏：你掷一枚公平的六面骰子，并且

- 如果骰子掷出5，你赢\$10，
- 否则，你输\$1。

一般来说，我们用负数来表示亏钱。因此，这个游戏的两个结果分别是：以概率 $1/6$ 得到10，以概率 $5/6$ 得到-1。这个游戏的期望值可以计算为

$$EV = 10 \left(\frac{1}{6} \right) + (-1) \left(\frac{5}{6} \right) = \frac{10}{6} - \frac{5}{6} = \frac{5}{6}.$$

这个数是正的，这意味着从长期来看，你每玩一次的平均净收益是 $\frac{5}{6}$ 美元。因此，从长期来看，这个游戏对玩家是有利的。

例题：赌场游戏的期望值

假设你花\$10 进入一个游戏。这个游戏有三种可能的净结果：

- 以概率0.6 输\$10，
- 以概率0.3 不赚不赔，
- 以概率0.1 赢\$40。

那么

$$EV = (-10)(0.6) + (0)(0.3) + (40)(0.1) = -6 + 0 + 4 = -2.$$

所以期望值是\$-2。平均来看，玩家每玩一次亏\$2。

3.3 公平游戏与不公平游戏

如果一个游戏的期望值为零，那么这个游戏称为公平的。这意味着从长期来看，任何一方都没有平均优势。

公平性的判据

$$\text{公平游戏} \iff \text{EV}(X) = 0.$$

如果 $\text{EV}(X) > 0$ ，这个游戏对你有利。如果 $\text{EV}(X) < 0$ ，这个游戏对你不利。

下面我们来看两个例子。

例1：一个掷硬币游戏

假设Alice 和Bob 掷一枚公平硬币。如果硬币是正面，Alice 给Bob \$1；如果硬币是反面，Bob 给Alice \$1。

从Bob 的角度看，结果是以概率 $1/2$ 得到+1，以概率 $1/2$ 得到-1，所以

$$\text{EV} = 1 \left(\frac{1}{2} \right) + (-1) \left(\frac{1}{2} \right) = 0.$$

因此这个游戏是公平的。

例2：一个不公平的骰子游戏

现在假设Alice 和Bob 掷一枚骰子。如果骰子落在3 的倍数上，Alice 给Bob \$1；如果不是3 的倍数，Bob 给Alice \$1。

从Bob 的角度看，收益是以概率 $2/6$ 得到+1，以概率 $4/6$ 得到-1。因此

$$\text{EV} = 1 \left(\frac{2}{6} \right) + (-1) \left(\frac{4}{6} \right) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

所以这个游戏对Bob 来说是不公平的。

为了让这个游戏公平，假设Bob 在输的时候只支付给Alice x 美元。那么

$$1 \left(\frac{2}{6} \right) + (-x) \left(\frac{4}{6} \right) = 0.$$

解得

$$2 - 4x = 0 \implies x = \frac{1}{2}.$$

所以Bob 输的时候只需要支付50 美分。

3.4 轮盘赌与赌场

一种类似轮盘赌的颜色游戏会让人感觉很公平，因为红色和黑色似乎是对称的。但如果轮盘上多了一个绿色格子，这种对称性就被打破了。

假设一个轮盘有37个格子：18个红色，18个黑色，1个绿色。你在某个颜色上押\$1，如果你的颜色出现，你的净收益是\$1，否则你损失\$1。那么期望值是

$$EV = (+1) \left(\frac{18}{37} \right) + (-1) \left(\frac{18}{37} \right) + (-1) \left(\frac{1}{37} \right) = -\frac{1}{37}.$$

所以这个期望值是负的。赌场在单次下注中只占很小的优势，但经过很多次游戏，这个优势就会不断累积。



4 货币与风险

期望值很重要，但它并不是全部。金融不仅仅关乎平均结果，它也关乎风险 以及风险管理。两个选择可能具有相同的期望值，但它们给人的感觉却可能非常不同，因为其中一个可能波动得多，或者危险得多。

4.1 保险

保险是最清楚地说明“人们并不只是依据期望值作决策”的例子之一。为了说明这一点，考虑下面这个例子。

假设你拥有一辆价值\$200 的自行车，而它在一年内被偷的概率是10%。如果没有保险，你的随机损失是：

- 以概率0.1 损失\$200，
- 以概率0.9 损失\$0。

所以期望损失是

$$EV(\text{损失}) = 200(0.1) + 0(0.9) = 20.$$

现在假设一家保险公司提供\$30 的全额保险。¹ 从纯粹期望值的数学角度看，为了避免一个平均损失\$20 的风险而支付\$30，并不是一个划算的选择。然而，许多人仍然会购买保险。为什么？因为保险把一个有风险的处境，替换成了一个更可预测 的处境。

保险的概念

一个选择即使具有负的期望值，也仍然可能是理性的，只要它显著减少了遭受大额损失的风险暴露。

¹这里“全额保险”指的是，如果自行车被偷，保险公司会赔付自行车的全部价值。

4.2 波动性

波动性衡量的是一个量上下波动的程度。在金融中，低波动性意味着回报相对接近其平均值，而高波动性意味着回报会大幅摆动。我们之前已经见过这种“分布得很开”的思想，这正是数据集离散程度的概念。事实上，标准差可以用来衡量投资的波动性。

为了看到这一点，考虑下面两种投资策略：

观测	策略A	策略B
1	+\$100	+\$200
2	+\$110	-\$50
3	+\$90	+\$100
4	+\$100	+\$150

这两种策略的平均回报相同：

$$\bar{x}_A = \bar{x}_B = 100.$$

然而，正如你所看到的，策略A 可靠得多，也稳定得多，而策略B 的波动性则大得多。我们可以通过计算它们各自的标准差来量化这种波动性。

对于策略A，偏离平均值的数分别是0, 10, -10, 0，因此样本方差为

$$s_A^2 = \frac{0^2 + 10^2 + (-10)^2 + 0^2}{4 - 1} = \frac{200}{3} \approx 66.67.$$

对这个值开平方，就得到标准差：

$$s_A \approx 8.16.$$

对于策略B，偏差是100, -150, 0, 50，它们比A 的偏差大得多。因此样本方差也更大：

$$s_B^2 = \frac{100^2 + (-150)^2 + 0^2 + 50^2}{4 - 1} = \frac{35,000}{3} \approx 11,666.67.$$

再开平方，就得到B 的标准差：

$$s_B \approx 108.01.$$

正如你所看到的，虽然两种策略的平均回报相同，但策略B 的波动性大得多。

解释

如果你只问“哪个选项的平均值更大？”，那么A 和B 看起来会一样好。但是一旦把波动性考虑进去，策略A 就更可预测，而策略B 则伴随着更大的起伏。这就是为什么金融不仅关乎平均回报，它也关乎你能够承受多大程度的不确定性。

4.3 分散投资

分散投资意味着把钱分散到不同资产中，而不是把所有钱集中在一个地方。它的想法很简单：如果一项投资表现不好，另一项投资可能表现较好，于是整体风险就可能降低。

分散投资

“不要把所有鸡蛋放在一个篮子里”既是一句谚语，也是一条金融原则。

分散投资并不保证 获利。相反，它是一种通过减少对任何单一结果的依赖，来管理风险的策略。

常见的投资策略

常见的投资策略包括：

- 政府债券，
- 指数基金，
- 高奖债券。

这些策略在可预测性、期望值和分散程度方面各不相同。

波动性较低的投资往往更可预测。波动性较高的投资可能带来更大的收益，但也可能使你承受更大的损失。因此，与其问“哪个选项的平均值最大？”，也许更值得问的是：

哪个选项是我在现实中真正能够承受的？

5 公式总结与练习

公式总结

百分比变化：	新值 = (旧值)(1 ± r),
单利：	$A = P(1 + rt)$,
复利：	$A = P(1 + r)^t$,
每年复利 n 次：	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$,
连续复利：	$A = Pe^{rt}$,
期望值：	$EV(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$,
样本方差：	$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$.

练习

- (a) 一台笔记本电脑价格是\$1800。它先打九五折，然后折后价格再上涨15%。最终价格是多少？它会回到\$1800 吗？
- (b) 你以4% 的单利投资\$2500，持续6 年。最后你会有多少钱？
- (c) 你以6% 的复利利率存入\$3000，持续4 年。如果按年复利，最后你会有多少钱？
- (d) 一个游戏有三种可能的净结果：以概率0.5 输\$5，以概率0.3 输\$1，以概率0.2 赢\$20。求它的期望值。
- (e) 掷一枚公平硬币。如果出现正面，你赢\$3；如果出现反面，你输\$2。这个游戏是公平的、有利的，还是不利的？
- (f) 考虑数据集

$$A = (8, 10, 12, 10), \quad B = (0, 10, 20, 10).$$

说明它们具有相同的平均值，但波动性不同。

参考答案

(a)

$$1800(0.85)(1.15) = 1759.50.$$

所以最终价格是\$1759.50，而不是\$1800。

(b)

$$A = 2500(1 + 0.04 \cdot 6) = 2500(1.24) = 3100.$$

(c)

$$A = 3000(1.06)^4 \approx 3000(1.26248) \approx 3787.43.$$

(d)

$$EV = (-5)(0.5) + (-1)(0.3) + (20)(0.2) = -2.5 - 0.3 + 4 = 1.2.$$

所以期望值是\$1.20。

(e)

$$EV = 3 \left(\frac{1}{2} \right) + (-2) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

所以这个游戏对玩家有利。

- (f) 两组数据的平均值都是10，样本方差分别为 $s_A^2 = \frac{8}{3}$ 和 $s_B^2 = \frac{200}{3}$ 。因此， B 的方差更大，所以它的波动性也更大。