

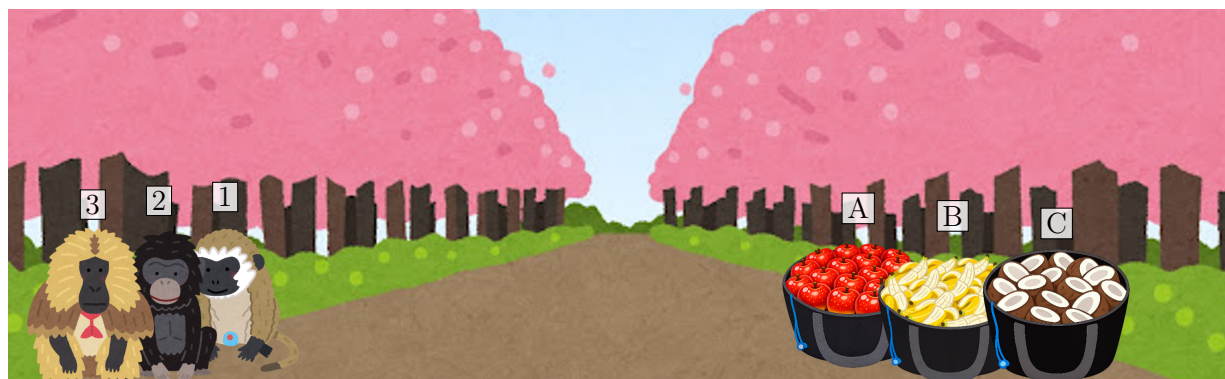
MAT120: 论证 第17讲讲义

数学与社会选择

上节课我们学习了数学与货币，重点讨论了增长、利息、期望值和风险。这一讲中，我们继续进入“数学与社会”这一单元，讨论数学如何用来研究集体决策。核心主题是社会选择理论：一个群体应该如何把许多个体偏好整合成一个社会结果？我们将介绍一些基本术语，学习几种投票规则，考察两种相互竞争的公平观，最后讨论搅局效应和孔多塞循环。更深层的启示是，即使像“进行一次投票”这样熟悉的事情，其实也带有主观性，并且隐藏着一些有趣的数学。

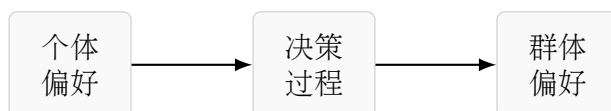
1 什么是社会选择？

假设三只猴子正在森林里行走，它们发现了三袋不同的食物：一袋装满了苹果，一袋装满了香蕉，还有一袋装满了椰子。假设我们的猴子们想偷走这些水果，但这些袋子又大又重，因此搬起其中任何一袋都需要三只猴子一起合作。考虑到这一点，猴子们决定它们只能偷走三袋水果中的一袋。



当然，每只猴子都有自己的偏好：也许猴子1 比起椰子和苹果更喜欢香蕉，或者猴子3 特别喜欢苹果。这个群体必须想办法共同决定，如何把这些偏好转化成一个单一的集体决策。它们应该怎么做呢？一开始听起来这很简单：猴子们只需要投票、统计答案、选出赢家就行了。然而，接下来我们就会遇到一个问题，也就是票应该如何统计。

这就是社会选择理论 的基本问题：我们如何根据一组个体偏好来作出一个群体决策？



当然，这是一个极其重要的问题：除了那些机会主义、带有盗窃倾向的灵长类动物之外，我们人类大多数时候也是以民主方式组织社会的，社会中所有具有资格的成员在选择政治领导人时都拥有平等的话语权。在这样的民主情境中，若我们能够知道自己的计票制度是否公平、合理并且在数学上表现良好，那将是很有价值的。

1.1 规范性问题与经验性问题

需要注意的是，社会选择理论主要是一门规范性 学科，而不是一门经验性 学科。这意味着它试图回答的问题是“我们应该 怎么做？”，而不仅仅是“我们实际上怎么做？”。这正是休谟著名的“是”与“应当”的区分。有些陈述只是描述性的，它们试图描述世界实际上是什么样；而另一些陈述则试图说明世界应该是什么样。

规范性主张与经验性主张

- **规范性** 主张关心的是，正确的做法是什么。
- **经验性** 主张关心的是，现实世界中实际发生了什么。

当然，现实中的选举涉及心理学、历史、媒体、制度、文化运动和策略等因素。但在讨论这些复杂性之前，先把基本的数学问题单独拿出来看是很有帮助的：一旦选民报告了他们的偏好，应该采用什么规则把这些偏好转换成一个结果？这正是我们今天要讨论的内容。

1.2 基本术语

事实上，投票规则有许多不同种类。在讨论这些规则之前，我们首先需要引入一些新的语言。

社会选择理论的基本术语

- **选民：** 提供输入的群体。
- **选项：** 可能的结果或候选者。
- **偏好排序：** 单个选民对选项从最好到最差的排序。
- **偏好概貌：** 所有选民排序的完整列表。
- **社会选择规则：** 以偏好概貌为输入并产生结果的方法。
- **结果：** 投票过程产生的决定。

在“三只猴子和三袋水果”的例子中：

- **选民** 是猴子们，
- **选项** 是那三袋水果，
- **偏好排序** 指的是某一只猴子对苹果、香蕉和椰子的喜好顺序，
- **偏好概貌** 指的是三份偏好排序组成的集合（每只猴子一份），
- **社会选择规则** 指的是猴子们把各自偏好的集合转化为单一决定的某种具体方式，
- **结果** 则是它们最终决定偷走的那一袋水果。

1.3 偏好概貌

偏好概貌通常写成一个表格，每一列对应一个选民，每一行对应一个排名。通常最上面一行表示最偏好的选项，最下面一行表示每位选民最不偏好的选项。

用我们的三只猴子举例，一个偏好概貌如下：

	猴子1	猴子2	猴子3
第1 选择:	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
第2 选择:	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
第3 选择:	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>C</i>

引入一些数学记号也很有帮助。我们用符号 $>$ 来表示偏好，因此 $A > B$ 读作“ A 比 B 更受偏好”。这样一来，我们也可以用数学方式来写一个偏好排序，即把选项集合按偏好顺序从左到右排开。例如，上表中的偏好概貌也可以写成：

- 猴子1: $A > B > C$,
- 猴子2: $A > C > B$,

- 猴子3: $B > A > C$ 。

注意，这些只是把上表中的各列用 $>$ 符号重新写了一遍。

2 投票规则

社会选择理论中的一个核心观察是：同一个偏好概貌，依据所采用的投票规则不同，可能会产生完全不同的赢家。因此，选举结果并不只由选民的想法决定，也取决于我们选择怎样计票。

重要观点

即使选民的偏好完全相同，不同的社会选择规则也可能产生不同的赢家。

由于我们只有一讲来讨论社会选择理论，这里只介绍四种基本的社会选择规则：

1. 相对多数制，
2. 决选制，
3. 波尔达计分法，
4. 孔多塞法。

2.1 相对多数制

在相对多数制下，每位选民只选择一个选项，而赢家就是获得最多第一名票数的选项。这是最简单的计票规则，并且在现实中被广泛使用。

相对多数制的直觉。 相对多数制只看偏好概貌最上面的一行。谁最经常出现在第一位，谁就获胜。

例如，考虑上面的偏好概貌。在这里，相对多数制只关心第一行，因此我们只要看最上面一行，看谁赢即可：

	猴子1	猴子2	猴子3	
第1 选择:	A	A	B	← A 获胜
第2 选择:	B	C	A	
第3 选择:	C	B	C	

相对多数制很简单，但这种简单是有代价的：它完全忽略了第二名和第三名的信息。一个很多人都觉得“可以接受”，但很少有人把它排在第一位的选项，很容易就会输掉。

2.2 决选制

决选制试图改进相对多数制的思想。在这个入门层次上，我们可以把它理解为，在第一轮中领先的几个选项之间进行第二次投票。这通常出现在第一轮没有产生决定性赢家的时候。它的目的是减少相对多数制只利用一层信息所带来的问题。

现实中的决选制度细节各不相同。对我们来说，主要思想只是：如果第一次计票没有明确解决问题，那么就把领先的选项放到一个更聚焦的第二阶段中再次比较。

2.3 波尔达计分法

波尔达计分法 使用整个偏好概貌。它不仅仅问“谁是第一？”，而是按照每个排序中的位置给分。当有三个选项时，一个自然的计分方式是：

$$\text{第1名} = 3, \quad \text{第2名} = 2, \quad \text{第3名} = 1.$$

然后把所有选民给出的分数加总，得分最高的选项获胜。

波尔达计分法的步骤

如果有 m 个选项，就按名次分配分数，把每个选项在所有选民中的得分加总，然后选出总分最高的选项。

例如，再考虑第2.1节中的偏好概貌。使用3, 2, 1的计分规则，我们得到：

- 猴子1 给出 $A = 3, B = 2, C = 1$;
- 猴子2 给出 $A = 3, C = 2, B = 1$;
- 猴子3 给出 $B = 3, A = 2, C = 1$ 。

所以总分为

$$A = 3 + 3 + 2 = 8, \quad B = 2 + 1 + 3 = 6, \quad C = 1 + 2 + 1 = 4.$$

因此波尔达赢家是 A 。也许最容易的做法还是利用前面的偏好表来算。上面的推理可以总结为：

	猴子1	猴子2	猴子3	
第1 选择	$A = 3$	$A = 3$	$B = 3$	$\left. \begin{array}{l} A : 3 + 3 + 2 = 8 \text{ 分} \\ B : 2 + 1 + 3 = 6 \text{ 分} \\ C : 1 + 2 + 1 = 4 \text{ 分} \end{array} \right\} \leftarrow A \text{ 获胜}$
第2 选择	$B = 2$	$C = 2$	$A = 2$	
第3 选择	$C = 1$	$B = 1$	$C = 1$	

2.3.1 另一个波尔达例子

现在考虑下面这个概貌：

	猴子1	猴子2	猴子3
第1 选择	B	C	B
第2 选择	C	A	C
第3 选择	A	B	A

这里，波尔达总分为

$$A = 1 + 2 + 1 = 4, \quad B = 3 + 1 + 3 = 7, \quad C = 2 + 3 + 2 = 7.$$

因此在这个例子里，波尔达计分法给出的是 B 和 C 的平局。总结如下：

	猴子1	猴子2	猴子3	
第1 选择	$B = 3$	$C = 3$	$B = 3$	$\left. \begin{array}{l} A : 1 + 2 + 1 = 4 \text{ 分} \\ B : 3 + 1 + 3 = 7 \text{ 分} \\ C : 2 + 3 + 2 = 7 \text{ 分} \end{array} \right\}$
第2 选择	$C = 2$	$A = 2$	$C = 2$	
第3 选择	$A = 1$	$B = 1$	$A = 1$	

← 平局

2.4 孔多塞法

孔多塞法与波尔达计分法相似，因为它也使用完整的偏好概貌。不过，孔多塞法读取信息的方式不同：它不是给分，而是把成对的选项相互比较。例如，如果有三个选项 A, B, C ，那么我们需要比较 A 对 B ，再比较 A 对 C ，然后比较 B 对 C 。对于每一对，我们统计有多少选民偏好其中一个而不是另一个。孔多塞法正是利用这种信息来决定谁应该获胜。

孔多塞思想

如果一个选项在一对一比较中击败所有其他选项，那么这个选项就是一个孔多塞胜者。

回到我们的猴子例子，再考虑这个偏好概貌：

- 猴子1: $A > B > C$,
- 猴子2: $A > C > B$,
- 猴子3: $B > A > C$ 。

由于这里只有3个选项，所以我们需要做3次两两比较。

1. A 对 B ：有两个选民偏好 A 胜过 B ，所以 A 击败 B 。
2. A 对 C ：三个选民都偏好 A 胜过 C ，所以 A 击败 C 。
3. B 对 C ：有两个选民偏好 B 胜过 C ，所以 B 击败 C 。

由于 A 在一对一比较中同时击败了 B 和 C ，因此 A 是孔多塞胜者。

从偏好表的角度来看，我们可以通过查看选项对，并统计每一列中哪一个选项获胜，来确定孔多塞胜者。例如，上面写出的“苹果对香蕉”的比较可以可视化：

	猴子1	猴子2	猴子3	
第1 选择:	A	A	B	$\left. \begin{array}{l} A > B \text{ 两次} \\ B > A \text{ 一次} \end{array} \right\}$
第2 选择:	B	C	A	
第3 选择:	C	B	C	

← A 击败 B

为了完整起见，比较(2)和(3)的表格形式也画在下面：

	猴子1	猴子2	猴子3	
第1 选择:	A	A	B	$A > C$ 三次 $\leftarrow$ A 击败C $C > A$ 零次
第2 选择:	B	C	A	
第3 选择:	C	B	C	

	猴子1	猴子2	猴子3	
第1 选择:	A	A	B	$B > C$ 两次 $\leftarrow$ B 击败C $C > B$ 一次
第2 选择:	B	C	A	
第3 选择:	C	B	C	

正如你所看到的，根据这三次两两比较，A 在正面对决中同时击败了B 和C，因此它被视为孔多塞胜者。

2.5 波尔达法与孔多塞法可能不一致

波尔达计分法和孔多塞法都试图利用比相对多数制更多的信息，但它们不一定会得出相同的结论。事实上，在只有三个选项和三个选民的情况下，不可能在波尔达法和孔多塞法下得到不同的唯一赢家，尽管平局仍然可能发生。不过，如果我们再增加两位选民，就可以构造出这样的偏好概貌。请看下面这个例子：

	1	2	3	4	5
第1 选择	A	B	A	B	A
第2 选择	B	C	B	C	B
第3 选择	C	A	C	A	C

我们可以把这两种规则都明确地算出来。先从波尔达计分法开始。注意，这个偏好概貌是：

- 选民1: $A > B > C$,
- 选民2: $B > C > A$,
- 选民3: $A > B > C$,
- 选民4: $B > C > A$,
- 选民5: $A > B > C$ 。

因此，波尔达得分为：

$$\begin{aligned}
 A &= 3 + 1 + 3 + 1 + 3 = 11, \\
 B &= 2 + 3 + 2 + 3 + 2 = 12, \\
 C &= 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7.
 \end{aligned}$$

因此，波尔达计分法认为B 是赢家。

接下来我们计算孔多塞法。两两比较如下：

1. A 对 B : 选民1、3 和5 偏好 A 胜过 B , 而选民2 和4 偏好 B 胜过 A 。所以, A 击败 B 。
2. A 对 C : 选民1、3 和5 偏好 A 胜过 C , 而选民2 和4 偏好 C 胜过 A 。所以, A 击败 C 。
3. B 对 C : 每位选民都偏好 B 胜过 C , 所以 B 击败 C 。

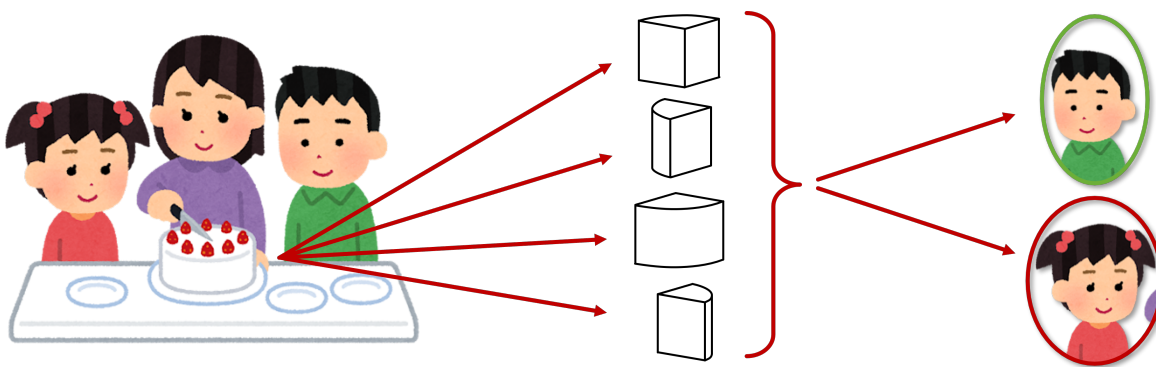
由于 A 在正面对决中同时击败了 B 和 C , 因此孔多塞胜者是 A 。

对于这个偏好概貌, 波尔达计分法选出的是 B , 而孔多塞法选出的是 A 。这说明, 即使两种投票规则都利用了完整的偏好概貌, 它们仍然可能产生不同的赢家。

3 公平性与效用

投票并不是群体必须作出集体决策的唯一场景。另一个重要问题是如何公平地分配资源, 这一过程称为“公平分配”。由于时间关系, 我们这里只通过一个例子来介绍这个思想。

假设一位母亲正试图在她的两个孩子之间分一块生日蛋糕。她把蛋糕切成四块, 并想把它们分给自己的孩子们:



她应该如何分配这些蛋糕块呢?

3.1 效用函数

假设我们把四块蛋糕分别标记为 A 、 B 、 C 和 D 。一种分配蛋糕的方法是, 先直接询问孩子们更喜欢哪些蛋糕块, 然后再设法以一种公平的方式把蛋糕分给每个孩子。每块蛋糕对每个孩子来说可能有不同的价值, 因此我们可以让孩子们对每一块蛋糕打一个满分为10 的分数, 分数越高表示那块蛋糕越有价值。比如, 女孩也许不喜欢糖霜, 因此她会把一块糖霜很多的蛋糕评为3 分。男孩也许特别饿, 因此他会把较大的那块蛋糕评为8 分。

假设两个孩子对每块蛋糕的评价如下:

	A	B	C	D
男孩	4	8	5	10
女孩	0	4	7	8

每个孩子给出的这组价值分配称为一个效用函数。它告诉我们每个人认为每一块蛋糕值多少。一旦有了这些数据，我们就可以从数值角度研究公平性。

3.2 把分配视为子集

任何蛋糕块的分配都可以用集合论来描述。在这里，我们可以把男孩或女孩得到的任意蛋糕块分配，与 $\{A, B, C, D\}$ 的一个子集对应起来。当然，这个分配的一半是固定的，因为如果男孩被分配到了某个子集，那么女孩就会得到它的补集。例如：

- 如果男孩得到蛋糕块 A, B, C ，那么女孩就得到蛋糕块 D 。这个分配把子集 $\{A, B, C\}$ 给了男孩，而女孩得到子集 $\{D\}$ ；
- 如果男孩得到 $\{A, C\}$ ，那么女孩得到 $\{B, D\}$ ；
- 如果男孩得到全部四块蛋糕，那么女孩得到 $\emptyset$ 。

原则上，男孩的分配可以是 $\{A, B, C, D\}$ 的任意一个子集。因此，所有可能分配组成的集合就是幂集

$$\mathcal{P}(\{A, B, C, D\}).$$

由于一个大小为4的集合有 $2^4 = 16$ 个子集，所以总共有16种可能的分配。

为什么会出现幂集

选择一种分配，等价于选择男孩获得哪一个蛋糕块子集。一旦这个子集被选定，女孩得到的部分就自动是它的补集。因此，可能分配的数量就是幂集的大小，即 $2^4 = 16$ 。

3.3 计算一个分配的价值

为了评估一个分配，我们只需把该子集中包含的相关效用加起来。¹ 例如，如果男孩得到 $\{B, C\}$ ，女孩得到 $\{A, D\}$ ，那么：

$$\text{男孩的价值} = 8 + 5 = 13, \quad \text{女孩的价值} = 0 + 8 = 8.$$

下表列出了所有可能的分配。为了方便以后使用，我们还在表的末尾加上了两列。

¹需要注意的是，这是我们方法中的一个假设。一般来说，并不必然有 $\{A, B\}$ 这个分配的价值等于 A 和 B 的单独价值之和。我们可以设想一些并非如此的情形。例如，吃鸡肉和吃果酱各自的价值都可能很高，但把鸡肉和果酱放在同一个三明治里的价值可能反而更低。

男孩得到	女孩得到	男孩的价值	女孩的价值	总和	最小值
$\emptyset$	$\{A, B, C, D\}$	0	19	19	0
$\{A\}$	$\{B, C, D\}$	4	19	23	4
$\{B\}$	$\{A, C, D\}$	8	15	23	8
$\{C\}$	$\{A, B, D\}$	5	12	17	5
$\{D\}$	$\{A, B, C\}$	10	11	21	10
$\{A, B\}$	$\{C, D\}$	12	15	27	12
$\{A, C\}$	$\{B, D\}$	9	12	21	9
$\{A, D\}$	$\{B, C\}$	14	11	25	11
$\{B, C\}$	$\{A, D\}$	13	8	21	8
$\{B, D\}$	$\{A, C\}$	18	7	25	7
$\{C, D\}$	$\{A, B\}$	15	4	19	4
$\{A, B, C\}$	$\{D\}$	17	8	25	8
$\{A, B, D\}$	$\{C\}$	22	7	29	7
$\{A, C, D\}$	$\{B\}$	19	4	23	4
$\{B, C, D\}$	$\{A\}$	23	0	23	0
$\{A, B, C, D\}$	$\emptyset$	27	0	27	0

3.4 两种公平理论

一旦效用被算出来，就可以施加不同的伦理原则。我们现在只关注其中两种。

两种公平理论

- **功利主义：** 选择使所有效用总和 最大的分配。
- **平等主义：** 选择使相关人员之间最小 效用最大的分配。

这两条规则并不相同。功利主义试图找到使总价值尽可能大的分配，而平等主义则试图找到尽可能保护最弱势者的分配。

3.4.1 功利主义结论

观察上表中的“总和”一列，最大的总价值是29，它出现在

男孩得到 $\{A, B, D\}$, 女孩得到 $\{C\}$.

所以功利主义会选择这个分配。

3.4.2 平等主义结论

观察上表中的“最小值”一列，最大的最小值是12，它出现在

男孩得到 $\{A, B\}$, 女孩得到 $\{C, D\}$.

所以平等主义会选择一个不同的分配。

公平性取决于原则

对于这个例子：

- **功利主义** 为男孩选择 $\{A, B, D\}$ ，为女孩选择 $\{C\}$ 。
- **平等主义** 为男孩选择 $\{A, B\}$ ，为女孩选择 $\{C, D\}$ 。

因此，“最公平的分配”并不是绝对的，也不必然是客观的。它取决于我们选择采纳哪一种公平原则。

4 搅局效应

搅局效应 是与相对多数制投票最相关、也最著名的问题之一。它发生在这样的情况下：第三位候选人虽然实际上几乎没有获胜机会，却改变了最终结果。

最著名的例子来自2000 年美国总统选举中的佛罗里达州。在这个情形里，主要有三位候选人：George W. Bush、Al Gore 和Ralph Nader。佛罗里达州这三位候选人的得票总数如下：

	Bush	Gore	Nader
票数	2,912,790	2,912,253	97,421

因此，Bush 仅以537 票的微弱优势赢得了佛罗里达州。

Nader 作为绿党候选人，在政治立场上比Al Gore 更偏左。因此，如果只能二选一，许多投给Nader 的人很可能会在Bush 和Gore 之间选择Gore。这就很可能导致Gore 赢下佛罗里达州。然而，Nader 这个选项本身的存在 可能把这些选票从Gore 那里分流走了，因此在现实中Gore 输掉了选举。

搅局效应

当一位几乎没有获胜机会的候选人，通过从一位立场接近的候选人那里分走选票而改变最终结果时，就会出现**搅局效应**。

换句话说，增加一个“无关”的选项，未必真的无关。这也是社会选择理论不仅关心谁获胜，也关心某条规则对额外选项出现有多敏感的原因之一。

5 孔多塞循环

人们也许会希望，只要使用两两多数比较，就总能把选举干净利落地解决。孔多塞循环说明，这种希望是错误的。考虑下面这个偏好概貌：

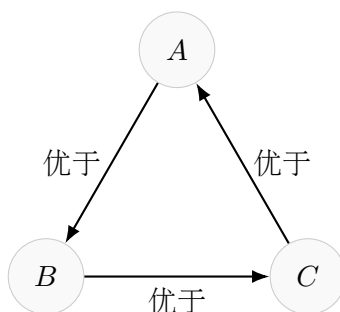
	选民1	选民2	选民3
第1 选择	A	C	B
第2 选择	B	A	C
第3 选择	C	B	A

对于这个概貌，没有多数赢家，而相对多数制会给出一个三方平局。因此，决选制度就需要额外的平局处理规则或更详细的规定。除此之外，波尔达计分法会给三个选项相同的分数，因此也是平局。最有趣的是，孔多塞法给出了如下两两比较：

本讲把其结果总结如下：

- $A > B$ 两次，而 $B > A$ 一次，所以 A 击败 B ；
- $C > A$ 两次，而 $A > C$ 一次，所以 C 击败 A ；
- $B > C$ 两次，而 $C > B$ 一次，所以 B 击败 C 。

于是我们制造出了一个“偏好循环”：群体偏好 A 胜过 B ，又偏好 B 胜过 C ，但同时又偏好 C 胜过 A ：



孔多塞循环

当多数偏好变成循环时，就会出现孔多塞循环：

$$A > B, \quad B > C, \quad \text{且} \quad C > A.$$

在这种情况下，不存在孔多塞胜者。

这是一个非常有趣的结果：我们刚刚展示了，即使在非常简单的情形中，个体选民各自都可能有完全一致的排序，但群体偏好仍然可能在整体上失去一致性。

6 练习

练习1：投票规则

考虑下面这个偏好概貌：

	选民1	选民2	选民3
第1 选择	B	C	B
第2 选择	C	A	C
第3 选择	A	B	A

- (a) 在相对多数制下谁获胜？
- (b) 使用计分规则3, 2, 1 计算波尔达总分。
- (c) 用两两比较确定孔多塞胜者。

解答

- (a) 在相对多数制下，只有第一名票数重要。 B 在第一位出现两次， C 出现一次，所以相对多数制选出 B 。
- (b) 波尔达总分为

$$A = 1 + 2 + 1 = 4, \quad B = 3 + 1 + 3 = 7, \quad C = 2 + 3 + 2 = 7.$$

因此，波尔达法给出 B 和 C 的平局。

- (c) 两两比较得到：
 - B 以2 票对1 票击败 A ,
 - C 以3 票对0 票击败 A ,
 - B 以2 票对1 票击败 C 。

因此， B 在一对一比较中击败了另外两个选项，所以孔多塞胜者是 B 。

练习2：公平性与效用

使用下面的效用表：

	A	B	C	D
男孩	4	8	5	10
女孩	0	4	7	8

假设男孩得到 $\{A, D\}$ ，女孩得到 $\{B, C\}$ 。

- (a) 计算男孩的价值。
- (b) 计算女孩的价值。
- (c) 计算功利主义总和和平等主义最小值。

解答

男孩的价值是

$$4 + 10 = 14.$$

女孩的价值是

$$4 + 7 = 11.$$

所以功利主义总和是

$$14 + 11 = 25,$$

而平等主义最小值是

$$\min(14, 11) = 11.$$