

MAT220 第15讲：总体均值的假设检验

目录

1 假设检验的复习	2
1.1 估计与假设检验	2
1.2 统计检验的一般结构	3
1.3 不同的尾部，不同的P值	3
2 σ 已知时检验μ	4
2.1 一般思想	4
2.2 例1：咖啡豆袋	5
3 σ 未知时检验μ	7
3.1 前一种方法失效的原因	7
3.2 学生 t 分布的复习	7
3.3 σ 未知时检验 μ	9
3.4 例2：重量不足的饭团	10
4 检验二项分布的成功概率p	11
4.1 样本比例的抽样分布	11
4.2 例3：罚点球	13
5 总结	15
6 附录：学生t 分布表	15

在第14讲中，我们介绍了假设检验的一般思想。我们学习了如何提出原假设和备择假设，如何解释P值，以及如何将P值与显著性水平进行比较。在本讲中，我们将重点研究检验核心部分的概率计算。我们将讨论以下三种重要情形：

1. 当 σ 已知时，检验总体均值 μ ；
2. 当 σ 未知时，检验总体均值 μ ；
3. 检验二项分布的成功概率 p 。

正如我们将看到的，虽然这三种情形中的核心概率计算不同，但它们都遵循相同的一般模式。

1 假设检验的复习

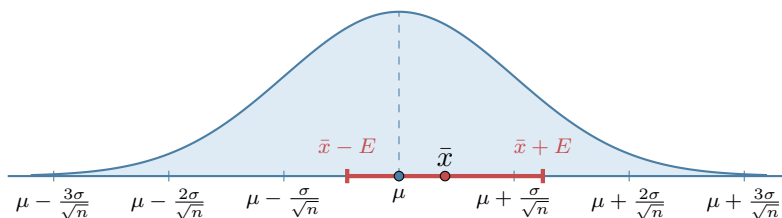
1.1 估计与假设检验

在估计未知总体参数时，我们抽取一个样本，并在该参数的估计值周围构造一个合理取值区间。例如，在估计总体均值时，我们可以构造一个以观测到的样本均值为中心的置信区间：

$$[\bar{x} - E, \bar{x} + E].$$

这里，真实的总体均值 μ 是未知的。区间的大小经过计算，使得这种方法能够以所选的比例包含 μ 。也就是说，如果我们反复抽取大小为 n 的样本，并围绕每个样本均值构造置信区间，那么其中一定比例的区间会包含真实的 μ 。

这一构造使用了中心极限定理。中心极限定理告诉我们，样本均值 $\bar{X}$ 具有自己的概率分布，其均值为 μ ，方差为 $\frac{\sigma^2}{n}$ 。¹ $\bar{x}$ 及其置信区间位于这一分布中：



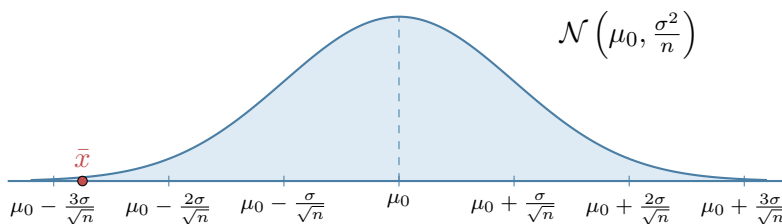
在进行假设检验时，我们会完全反转这一思考过程。我们首先假设总体参数具有某个特定值，然后询问在这一假设下，观测到的样本数据是否合理。例如，假设原假设为

$$H_0 : \mu = \mu_0.$$

我们假设真实的总体均值实际上就是 μ_0 ，然后研究这一假设所产生的结果。如果 H_0 为真，那么中心极限定理告诉我们，抽样分布应当为：

$$\bar{X} \approx \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

因此，任何观测到的样本均值 $\bar{x}$ 都应当出现在这一分布中的某个位置。如果我们从真实世界的数据中抽取样本，而样本均值 $\bar{x}$ 落在分布尾部非常远的位置，那么在 H_0 成立的情况下，这些数据是不太可能出现的：



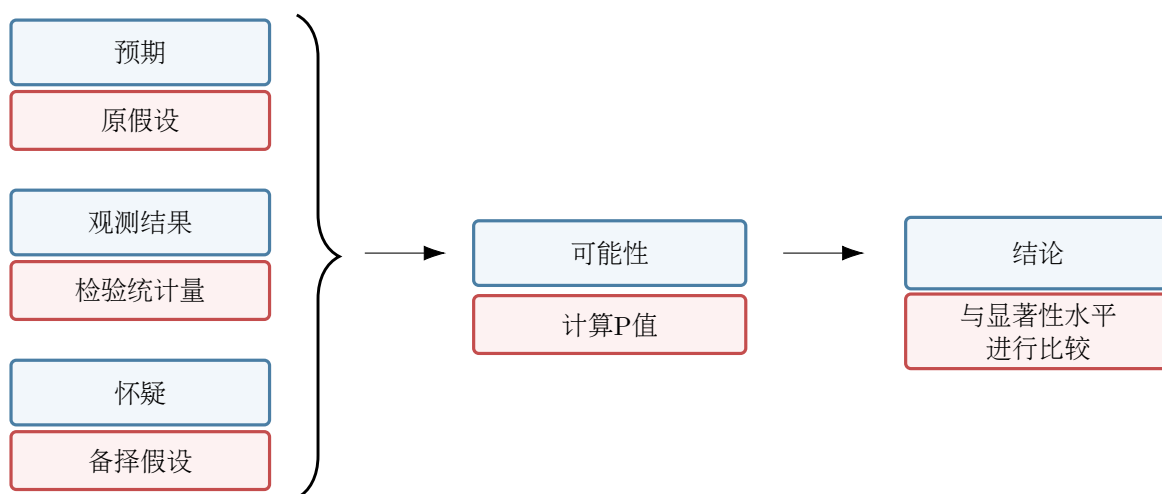
虽然这两种方法看起来非常相似，但它们之间存在关键区别：

¹严格来说，除非总体本身服从正态分布，否则 n 应当足够大。通常，我们使用大小至少为30的样本。

- 在**估计**中，总体参数是未知的，我们构造一个可能取值的区间；
- 在**假设检验**中，我们假设总体参数具有某个特定值，并询问在这一假设下，观测数据是否合理。

1.2 统计检验的一般结构

回顾第14讲中统计检验的一般结构：



第一阶段涉及阅读并解释问题情境。我们需要确定：

- 正在检验的主张；
- 针对这一主张的怀疑；
- 相关的样本信息。

第二阶段涉及主要的概率计算。然后，我们使用这一数值，即P值，作出判断：将得到的P值与所选的显著性水平进行比较，并决定样本是否提供了足够的证据来拒绝原假设。

重要定义

- **原假设 (H_0)**： 我们想要检验的陈述。
- **备择假设 (H_1)**： 反映我们怀疑的、与原假设相竞争的陈述。
- **检验统计量**： 从样本数据中得到的数值信息。
- **P值**： 假设 H_0 为真时，得到观测到的检验统计量或更极端结果的概率。
- **显著性水平 (α)**： 用于判断什么程度的低概率属于不可接受地不可能发生的临界概率。

1.3 不同的尾部，不同的P值

学生经常会认为P值表示原假设为真的可能性。事实上，这种理解是**错误的**。P值所衡量的是：如果原假设为真，那么观测到的样本，或者更极端的结果，会有多么异常。

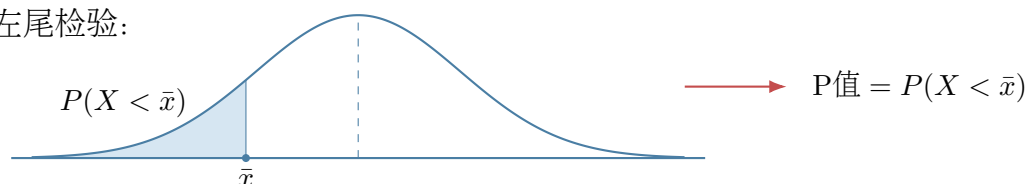
备择假设决定哪些结果应当被视为比观测到的样本数据“更极端”。备择假设通常有以下三种形

式:

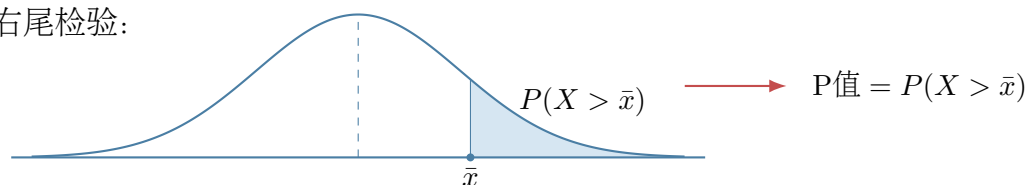
$$H_1 : \begin{cases} \text{真实值} < \text{主张值}, & \text{左尾检验}, \\ \text{真实值} > \text{主张值}, & \text{右尾检验}, \\ \text{真实值} \neq \text{主张值}, & \text{双尾检验}. \end{cases}$$

根据备择假设的陈述, 我们所考虑的尾部不同, P值的计算也会发生变化:

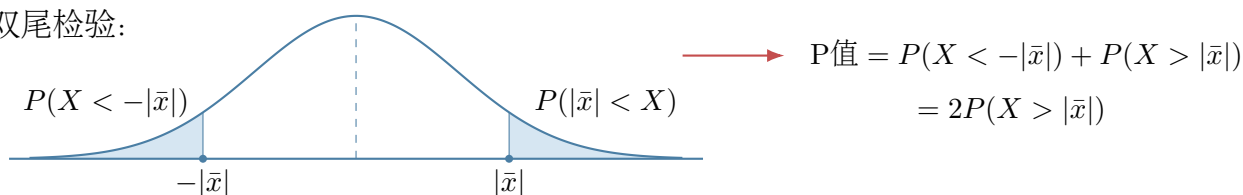
左尾检验:



右尾检验:



双尾检验:



2 σ 已知时检验 μ

2.1 一般思想

假设我们想要检验关于总体均值 μ 的某个主张, 并且总体标准差 σ 恰好已知。在这种情况下, 原假设的形式为:

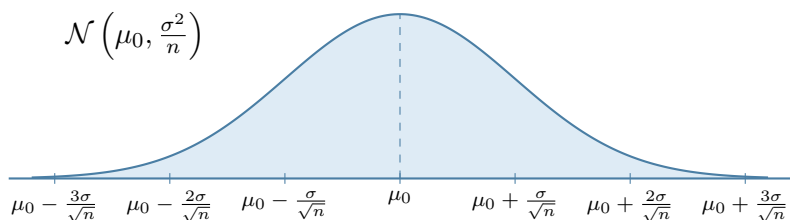
$$H_0 : \mu = \mu_0,$$

其中 μ_0 是所主张的 μ 的取值。通常还会给出样本数据, 即样本量 n 和样本均值 $\bar{x}$ 的具体数值。

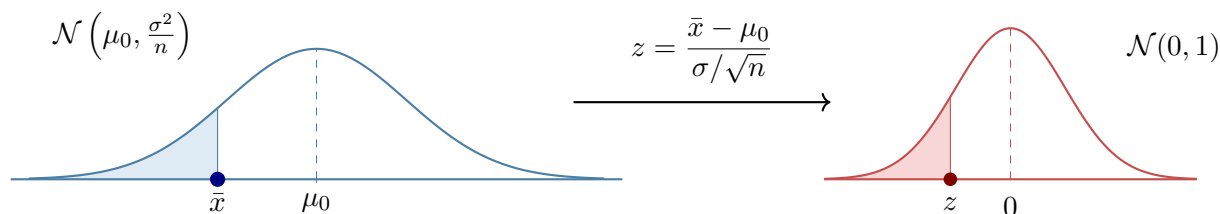
为了计算相应的P值, 我们假设原假设为真, 也就是说, 假设总体均值实际上就是 μ_0 。在这一假设下, 中心极限定理告诉我们, 样本均值的抽样分布具有以下参数:

$$\bar{X} \approx \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

这意味着正态分布的中心是所主张的均值 μ_0 , 标准误差为 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。



如果我们想要计算某个 $\bar{x}$ 或更极端结果的概率，就需要将这一面积转换为标准正态分布下的面积。连接这两个分布的正是熟悉的 z 分数公式。例如，对于左尾检验，与观测值 $\bar{x}$ 对应的P值可能是如下区域：



由于抽样分布的中心被假设为 μ_0 ，标准误差为 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，因此可以使用公式：

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

P值的具体计算方式取决于我们所进行的检验类型。根据第1节的讨论，我们需要计算以下三者之一：

- 如果是左尾检验，则计算 $P\left(Z < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$ ；
- 如果是右尾检验，则计算 $P\left(Z > \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$ ；
- 如果是双尾检验，则计算 $2P\left(Z > \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right|\right)$ 。

σ 已知时检验 μ

当总体标准差 σ 已知时，使用检验统计量

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

所得数值对应的概率可以使用标准正态分布 $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 的 z 表计算。

2.2 例1：咖啡豆袋

假设你在一家生产咖啡豆袋的公司工作。每袋咖啡豆的平均重量应当为150 g，但你怀疑真实的平均重量实际上低于这一数值。

为了检验这一怀疑，你从中随机抽取30袋，得到样本均值 $\bar{x} = 145$ g。根据历史数据，你知道总体标准差为 $\sigma = 15$ g。现在我们使用显著性水平 $\alpha = 0.01$ 进行检验。

步骤1: 确定信息

根据问题设定, 重要数值为:

$$\mu_0 = 150, \quad n = 30, \quad \bar{x} = 145, \quad \sigma = 15, \quad \alpha = 0.01.$$

公司声称总体均值为150 g, 而我们怀疑它小于150 g。因此, 原假设和备择假设分别为:

$$H_0: \mu = 150, \quad \text{以及} \quad H_1: \mu < 150.$$

由于备择假设是一个“小于”的陈述, 因此我们进行左尾检验。

步骤2: 计算P值

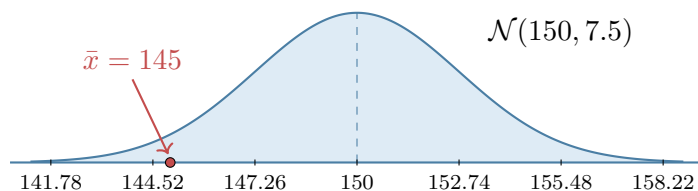
如果我们假设真实均值为150 g, 那么中心极限定理告诉我们, 抽样分布近似服从具有以下参数的正态分布:

$$\bar{X} \approx \mathcal{N}\left(150, \frac{15^2}{30}\right) = \mathcal{N}(150, 7.5).$$

这里, 标准误差为

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{7.5} \approx 2.74.$$

因此, 原假设下的抽样分布横轴可以近似标记如下:



现在计算 z 分数:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{145 - 150}{15/\sqrt{30}} \approx -1.83.$$

因此, $\bar{X}$ 小于145 g 的概率, 可以通过计算 Z 小于-1.83 的概率来得到。使用 z 表:

$$P(\bar{X} < 145) = P(Z < -1.83) \approx 0.0336.$$

由于我们进行的是左尾检验, 因此这就是P值。换句话说, 如果真实平均重量确实为150 g, 那么从这种大小的样本中得到145 g 或更小的样本均值的概率约为3.36%。

步骤3: 将P值与 α 比较

直接比较P值和 α :

$$0.0336 > 0.01.$$

因此, 在1% 的显著性水平下, 我们不拒绝 H_0 。

步骤4: 给出解释

一种可能的解释如下。

解释

在1% 的显著性水平下，该样本没有提供有说服力的证据表明咖啡豆袋的真实平均重量低于150 g。

3 σ 未知时检验 μ

3.1 前一种方法失效的原因

再次假设我们想要检验

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$

但这一次总体标准差 σ 未知。在上一节中，我们使用 z 分数公式

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

计算相应的P值。

但是，如果 σ 未知，我们就无法真正计算这一数值。因此，我们必须像第13讲中那样，用样本标准差 s 来估计 σ 。只需在上面的公式中用 s 替换 σ ，便得到一个不同的量：

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

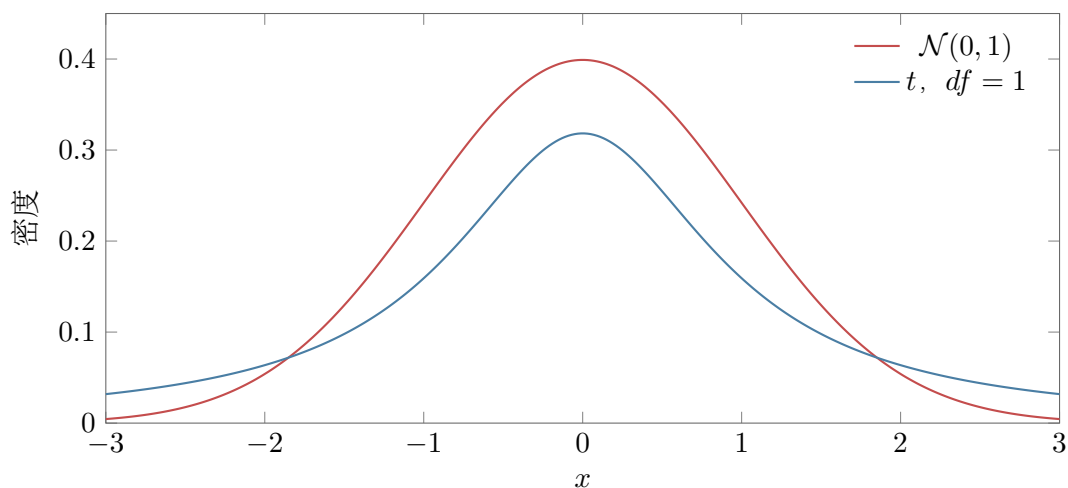
然而，正如我们在第13讲中看到的，这个量不再服从正态分布。估计 σ 时引入了额外的不确定性，因此我们需要使用学生 t 分布。下面简要复习这一内容。

3.2 学生 t 分布的复习

假设原总体服从均值为 μ 的正态分布。对于大小为 n 的样本，样本均值为 $\bar{X}$ ，样本标准差为 S 。这里将 S 本身视为一个随机变量，则

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

服从自由度为 $df = n - 1$ 的学生 t 分布。学生 t 分布与标准正态分布有些相似，但它们的尾部更厚：

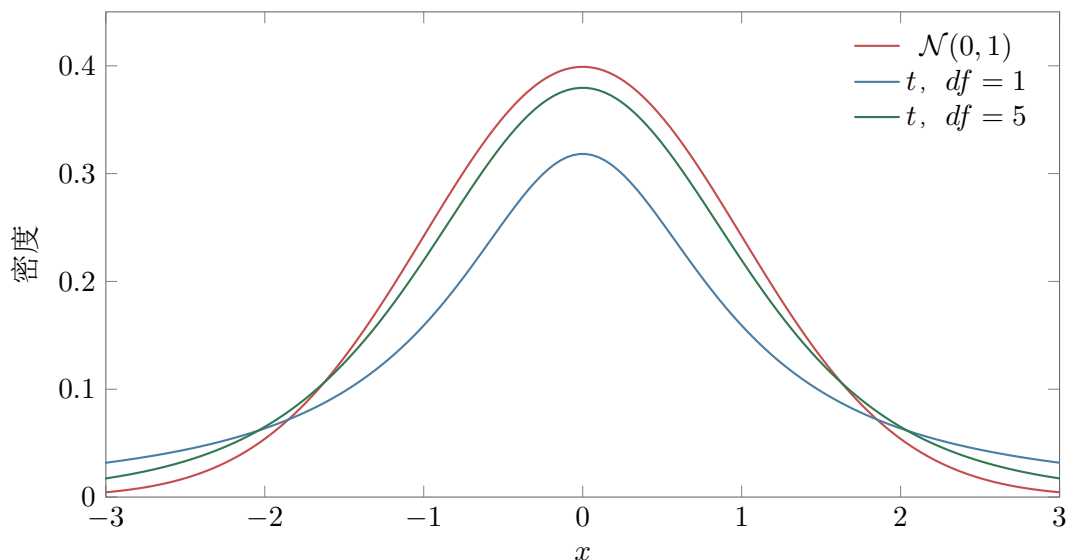


特别地，这些分布仍然满足许多与标准正态分布相同的性质：

- 它们仍然关于0 对称；
- 曲线下的总面积仍然为1；
- 概率仍然对应于曲线下的面积。

不过，它们之间也存在一些重要区别。首先， t 分布并不是只有一个。相反，它们构成一个完整的分布族，具体曲线取决于不同的自由度 df 。

这里的思想是，当样本量增加时，观测值中的初始随机噪声最终会相互抵消，使我们能够更准确地估计真实的 σ 。正如预期的那样，当 n 增加时， s 往往会更加接近 σ ，因此 t 分布也越来越接近 $\mathcal{N}(0, 1)$ ：



3.3 σ 未知时检验 μ

在不知道 σ 的情况下，我们不使用第2节中的 z 分数公式，而是使用 t 统计量：

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}},$$

其中 μ_0 仍然是总体均值 μ 的假定值。该公式允许我们计算与样本观测值相关的P值。

σ 未知时检验 μ

当总体标准差 σ 未知时，使用

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

所得数值使我们可以在自由度为 $df = n - 1$ 的学生 t 分布下计算概率，从而求出观测样本的P值。

同样，具体的P值取决于备择假设要求我们计算什么：

$$H_1 : \mu < \mu_0 \implies \text{P值} = P(T < t),$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \implies \text{P值} = P(T > t),$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \implies \text{P值} = 2P(T > |t|).$$

当然，此时最明显的问题是：我们最初应当如何计算这些概率？过去，如果想要计算正态分布中的某个概率，我们会先计算 z 分数，然后从表中读取概率 $P(Z < z)$ 。

类似地，学生 t 分布也有相应的表格。在下面的附录中可以看到这样的表。其思想与第10讲中的 z 表基本相同：我们计算一个 t 值，然后从表中读取相应的概率 $P(T < t)$ 。

当我们需要计算 $P(T > t)$ 或 $P(t_1 < T < t_2)$ 之类的概率时，可以使用与正态分布中相同的方法：

如何求 t 分布中的其他面积

- t 左侧的面积：直接从表中读取 $P(T < t)$ 。
- t 右侧的面积：使用 $P(T > t) = 1 - P(T < t)$ 。
- 两个数值之间的面积：使用 $P(t_1 < T < t_2) = P(T < t_2) - P(T < t_1)$ 。
- 负数值：利用对称性，当 $t > 0$ 时，

$$P(T < -t) = 1 - P(T < t).$$

这些表格中唯一主要的区别是精度。在 z 表中，我们可以查到小数点后两位的 z 值；但在 t 表中，只能查到小数点后一位的 t 值。表中的其他信息则给出了不同自由度 df 的答案，最大到30。

练习

使用附录中给出的左尾 t 表，求：

- (a) 当 $df = 18$ 时， $P(T < 1.3)$ ；
- (b) 当 $df = 7$ 时， $P(T < -2.0)$ ；
- (c) 当 $df = 12$ 时， $P(T > 1.8)$ 。

解答

(a)

$$P(T < 1.3) \approx 0.8950.$$

(b)

$$P(T < -2.0) \approx 0.0428.$$

(c) 根据表格,

$$P(T < 1.8) \approx 0.9515.$$

因此,

$$P(T > 1.8) = 1 - P(T < 1.8) \approx 1 - 0.9515 = 0.0485.$$

3.4 例2: 重量不足的饭团

假设你每天都从便利店购买同一种标称重量为200 g 的饭团。但是, 你怀疑该公司误导了顾客, 真实的平均重量实际上低于200 g。

为了检验这一怀疑, 你在7月的31天中, 每天随机选择一个饭团并称重。根据这一样本, 你计算出样本均值为 $\bar{x} = 197$ g, 样本标准差为 $s = 9$ g。

现在我们使用显著性水平 $\alpha = 0.05$ 进行检验。

步骤1: 确定信息

根据问题设定, 重要数值为:

$$\mu_0 = 200, \quad n = 31, \quad \bar{x} = 197, \quad s = 9, \quad \alpha = 0.05.$$

公司声称总体均值为200 g, 而我们怀疑它小于200 g。因此, 原假设和备择假设分别为:

$$H_0: \mu = 200, \quad \text{以及} \quad H_1: \mu < 200.$$

由于备择假设是一个“小于”的陈述, 因此我们进行左尾检验。

步骤2: 计算P值

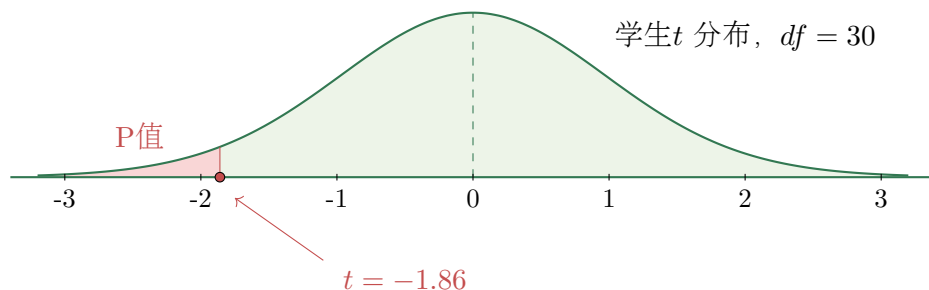
在上一个例子中, 我们知道真实的总体标准差 σ , 因此可以使用标准正态分布。然而, 在这个例子中, 我们只知道样本标准差 $s = 9$ 。因此, 我们需要计算 t 统计量:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{197 - 200}{9/\sqrt{31}} \approx -1.86.$$

由于样本量为 $n = 31$, 自由度为:

$$df = n - 1 = 31 - 1 = 30.$$

因此, 假设原假设为真, 计算出的数值 $t = -1.86$ 位于自由度为 $df = 30$ 的学生 t 分布中:



由于我们进行的是左尾检验，P值是得到 -1.86 或更小的 t 统计量的概率：

$$P\text{值} = P(T < -1.86), \quad df = 30.$$

t 表只列出了小数点后一位的数值，因此 -1.86 位于表中 -1.9 与 -1.8 之间。根据表格：

$$P(T < -1.9) \approx 0.03354$$

以及

$$P(T < -1.8) \approx 0.04096.$$

由于 -1.86 位于这两个数值之间，我们取两者的中点来估计P值：

$$P\text{值} \approx \frac{0.03354 + 0.04096}{2} = 0.03725.$$

换句话说，如果真实的平均重量确实为 200 g ，那么从这种大小的样本中得到 -1.86 或更小的 t 统计量的概率约为 3.7% 。

步骤3：将P值与 α 比较

直接比较P值和 α ：

$$0.03725 < 0.05.$$

因此，在 5% 的显著性水平下，我们拒绝 H_0 。

步骤4：给出解释

解释

在 5% 的显著性水平下，该样本提供了有说服力的证据，表明饭团的真实平均重量低于标称的 200 g 。

4 检验二项分布的成功概率 p

4.1 样本比例的抽样分布

现在假设我们研究一个成功概率 p 未知的二项试验。作为样本，我们观察该试验的 n 次重复，并得到 r 次成功和 $n - r$ 次失败。根据这些信息，我们可以检验关于真实概率 p 的主张，即如下形式的

原假设:

$$H_0 : p = p_0.$$

根据样本数据, 可以计算样本比例

$$\hat{p} = \frac{r}{n}.$$

假设原假设为真, 则该二项试验的正态近似是 $\hat{P}$ 的抽样分布, 其参数为:

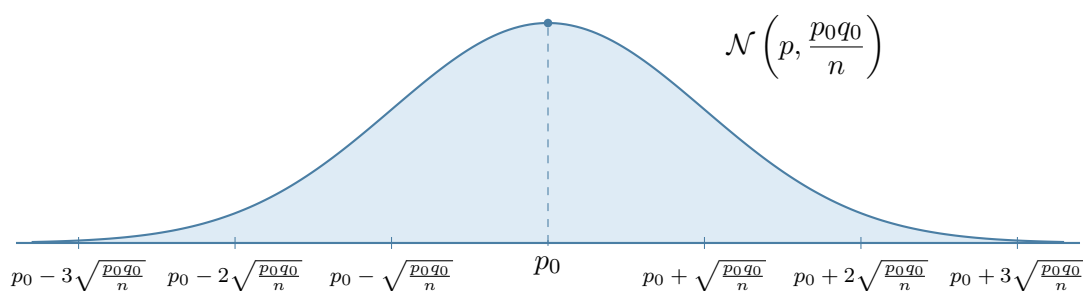
$$\hat{P} \approx \mathcal{N}\left(p_0, \frac{p_0 q_0}{n}\right),$$

其中 $q_0 = 1 - p_0$ 。

从几何上看, 该分布的中心是所主张的数值 p_0 , 标准误差为

$$\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}},$$

这意味着正态分布的横轴以这一数值为单位进行标记:



因此, 相应的 z 分数为

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}.$$

检验二项分布的成功概率 p

在检验二项分布成功概率 p 的真实数值时, 使用检验统计量

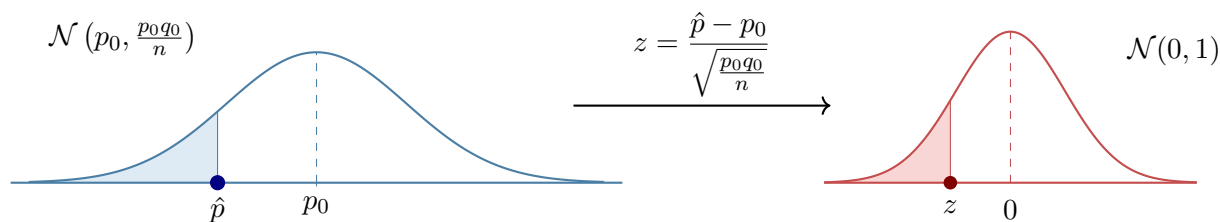
$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}},$$

其中

$$\hat{p} = \frac{r}{n} \quad \text{以及} \quad q_0 = 1 - p_0.$$

所得数值对应的概率可以使用标准正态分布 $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 的 z 表计算。

与第2节相同, 从几何角度看, 该公式将概率计算转换为正态分布下的面积, 而这一面积可以从 z 表中求得。上面方框中的公式给出了与标准正态分布之间的联系, 从而能够方便地计算面积:



在使用近似之前，我们应当始终检查 $np_0 \geq 5$ 和 $nq_0 \geq 5$ 。这些条件表明正态近似是合理的。

另外，请注意，在假设检验中，标准误差使用原假设中的数值 p_0 计算：

$$\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}.$$

这与 p 的置信区间不同。在置信区间中，我们使用观测值 $\hat{p}$ 和 $\hat{q}$ ：

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}.$$

4.2 例3：罚点球

假设你的朋友约翰声称，他罚点球的水平与莱昂内尔·梅西一样好。梅西职业生涯的点球成功率为78%。

于是，你观看约翰练习。令人惊讶的是，他在55次尝试中罚进了52个点球。看到约翰出色的表现后，你怀疑他的真实命中率甚至可能高于莱昂内尔·梅西。

现在我们使用显著性水平 $\alpha = 0.01$ 进行假设检验。

步骤1：确定信息

根据问题设定，重要数值为：

$$p_0 = 0.78, \quad q_0 = 1 - p_0 = 0.22, \quad n = 55, \quad r = 52, \quad \alpha = 0.01.$$

约翰最初的主张对应于成功概率0.78，而我们怀疑他的真实成功概率大于0.78。因此，原假设和备择假设分别为：

$$H_0 : p = 0.78, \quad \text{以及} \quad H_1 : p > 0.78.$$

由于备择假设是一个“大于”的陈述，因此我们进行右尾检验。

步骤2：计算P值

在使用正态近似之前，首先检查近似条件：

$$np_0 = 55(0.78) = 42.9 \quad \text{以及} \quad nq_0 = 55(0.22) = 12.1.$$

这两个数值都大于5，因此使用正态近似是合理的。

为了计算P值，首先求观测到的样本比例：

$$\hat{p} = \frac{r}{n} = \frac{52}{55} \approx 0.945.$$

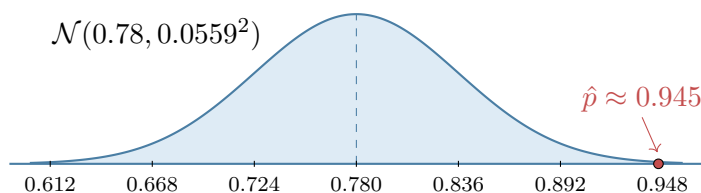
如果假设真实成功概率为 $p_0 = 0.78$ ，那么正态近似告诉我们， $\hat{P}$ 的抽样分布近似服从具有以下参数的正态分布：

$$\hat{P} \approx \mathcal{N}\left(0.78, \frac{(0.78)(0.22)}{55}\right).$$

特别地，该分布以所主张的 p_0 为中心。这里的标准误差为：

$$\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} = \sqrt{\frac{(0.78)(0.22)}{55}} \approx 0.0559.$$

因此，抽样分布的横轴可以近似标记如下：



仅通过观察图形，我们就可以看到 $\hat{p}$ 距离中心非常远，因此极不可能出现。不过，我们仍然可以通过计算相应的 z 分数来求出这一概率：

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0.945 - 0.78}{\sqrt{\frac{(0.78)(0.22)}{55}}} \approx 2.96.$$

因此， $\hat{P}$ 大于约0.945 的概率，可以通过求 Z 大于2.96 的概率得到。使用 z 表，首先得到：

$$P(Z < 2.96) = 0.99846.$$

这一数值是2.96 左侧的概率。我们进行的是右尾检验，因此需要右侧面积：

$$P(Z > 2.96) = 1 - P(Z < 2.96) = 1 - 0.99846 = 0.00154.$$

这就是P值。换句话说，如果约翰罚进点球的真实概率确实为0.78，那么在55次尝试中观察到约0.945 或更大的样本比例的概率约为0.154%。

步骤3：将P值与 α 比较

直接比较P值和 α ：

$$0.00154 < 0.01.$$

因此，在1% 的显著性水平下，我们拒绝 H_0 。

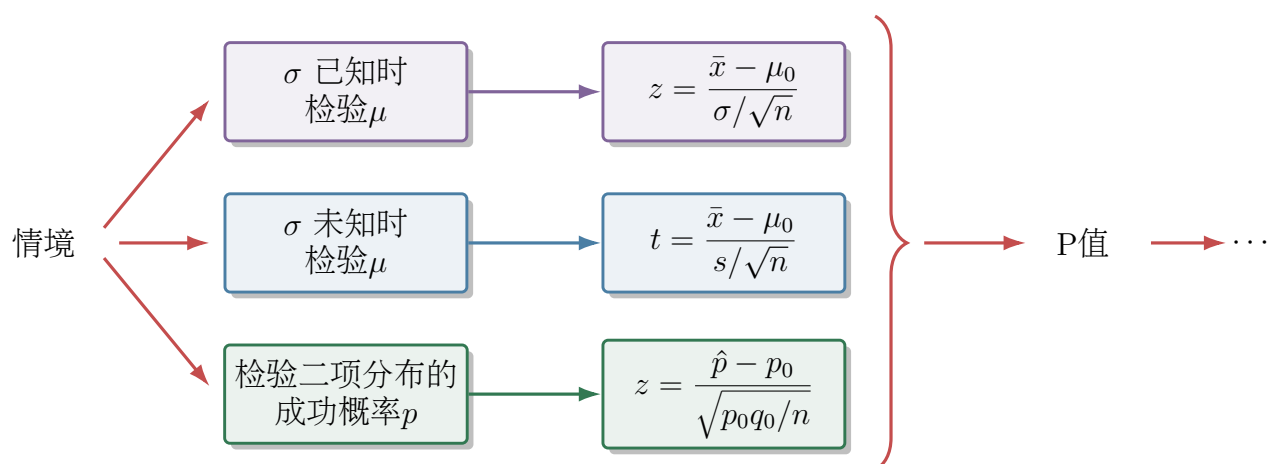
步骤4: 给出解释

解释

在1% 的显著性水平下，约翰的结果提供了有说服力的证据，表明他罚进球的真实概率大于0.78。

5 总结

在本讲中，我们学习了三种可以对总体参数进行假设检验的不同情形。一般来说，我们的任务是正确识别每个问题的具体情境，并知道在每种情况下应当计算哪一种检验统计量。大致流程如下：



无论具体情境如何，假设检验的整体流程始终相同：

1. 提出 H_0 和 H_1 ，并记录样本数据；
2. 计算适当的检验统计量和P值；
3. 将P值与 α 比较，并决定是否拒绝 H_0 ；
4. 最后，结合问题情境给出结论。

6 附录：学生 t 分布表

下面的表格给出了不同自由度下学生 t 分布曲线下方面积的近似值。与之前使用的 z 表不同，这些表格中的 t 值只精确到小数点后一位。

如果得到的 t 统计量精确到小数点后两位，可以采用以下三种方法：

- 如果小数点后第二位是1、2 或3，则可以向下取整到小数点后一位；
- 如果小数点后第二位是7、8 或9，则可以向上取整到小数点后一位；
- 如果小数点后第二位是4、5 或6，则可以取表格中两个最接近答案的中点。

表格使用自由度 df 从1 到30 的各行，取代了小数点后第二位，并给出相应的曲线下面积。

Table 1: The Left-tailed Probabilities $P(T < t)$ for positive t , with $df = 1-15$

t	df 1	df 2	df 3	df 4	df 5	df 6	df 7	df 8	df 9	df 10	df 11	df 12	df 13	df 14	df 15
0.0	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000
0.1	0.53173	0.53527	0.53667	0.53742	0.53788	0.53820	0.53843	0.53860	0.53873	0.53884	0.53893	0.53900	0.53906	0.53912	0.53917
0.2	0.56283	0.57001	0.57286	0.57438	0.57532	0.57596	0.57642	0.57676	0.57704	0.57726	0.57743	0.57759	0.57771	0.57782	0.57792
0.3	0.59277	0.60376	0.60812	0.61044	0.61188	0.61285	0.61355	0.61409	0.61450	0.61484	0.61511	0.61534	0.61554	0.61571	0.61585
0.4	0.62112	0.63608	0.64203	0.64520	0.64716	0.64850	0.64946	0.65019	0.65076	0.65122	0.65159	0.65191	0.65217	0.65240	0.65260
0.5	0.64758	0.66667	0.67428	0.67834	0.68085	0.68256	0.68380	0.68473	0.68546	0.68605	0.68654	0.68694	0.68728	0.68758	0.68783
0.6	0.67202	0.69528	0.70460	0.70958	0.71267	0.71477	0.71629	0.71744	0.71835	0.71907	0.71967	0.72017	0.72059	0.72095	0.72127
0.7	0.69440	0.72180	0.73284	0.73875	0.74243	0.74493	0.74674	0.74811	0.74919	0.75006	0.75077	0.75136	0.75187	0.75230	0.75268
0.8	0.71478	0.74618	0.75890	0.76574	0.76999	0.77289	0.77500	0.77659	0.77784	0.77885	0.77968	0.78037	0.78096	0.78146	0.78190
0.9	0.73326	0.76845	0.78277	0.79050	0.79531	0.79860	0.80099	0.80280	0.80422	0.80536	0.80630	0.80709	0.80776	0.80833	0.80883
1.0	0.75000	0.78868	0.80450	0.81305	0.81839	0.82204	0.82469	0.82670	0.82828	0.82955	0.83060	0.83148	0.83222	0.83286	0.83341
1.1	0.76515	0.80698	0.82416	0.83346	0.83927	0.84325	0.84614	0.84834	0.85006	0.85145	0.85259	0.85355	0.85436	0.85506	0.85566
1.2	0.77886	0.82350	0.84187	0.85182	0.85805	0.86232	0.86541	0.86777	0.86961	0.87110	0.87233	0.87335	0.87422	0.87497	0.87563
1.3	0.79129	0.83838	0.85777	0.86827	0.87485	0.87935	0.88262	0.88510	0.88705	0.88862	0.88991	0.89099	0.89191	0.89270	0.89339
1.4	0.80257	0.85176	0.87200	0.88295	0.88980	0.89448	0.89788	0.90046	0.90249	0.90412	0.90546	0.90658	0.90754	0.90836	0.90907
1.5	0.81283	0.86380	0.88471	0.89600	0.90305	0.90786	0.91135	0.91400	0.91607	0.91775	0.91912	0.92027	0.92125	0.92209	0.92282
1.6	0.82219	0.87463	0.89605	0.90758	0.91475	0.91964	0.92318	0.92587	0.92779	0.92966	0.93105	0.93221	0.93320	0.93404	0.93478
1.7	0.83075	0.88438	0.90615	0.91782	0.92506	0.92998	0.93354	0.93622	0.93833	0.94002	0.94140	0.94256	0.94354	0.94439	0.94512
1.8	0.83859	0.89317	0.91516	0.92688	0.93412	0.93902	0.94256	0.94522	0.94730	0.94897	0.95034	0.95148	0.95245	0.95328	0.95400
1.9	0.84579	0.90109	0.92318	0.93488	0.94207	0.94692	0.95040	0.95302	0.95506	0.95669	0.95802	0.95914	0.96008	0.96089	0.96158
2.0	0.85242	0.90825	0.93034	0.94194	0.94903	0.95379	0.95719	0.95974	0.96172	0.96331	0.96460	0.96567	0.96658	0.96736	0.96803
2.1	0.85854	0.91473	0.93672	0.94817	0.95512	0.95976	0.96306	0.96553	0.96744	0.96896	0.97020	0.97123	0.97209	0.97283	0.97347
2.2	0.86420	0.92060	0.94241	0.95367	0.96045	0.96495	0.96813	0.97050	0.97233	0.97378	0.97496	0.97593	0.97675	0.97745	0.97805
2.3	0.86945	0.92593	0.94751	0.95853	0.96511	0.96945	0.97250	0.97476	0.97650	0.97787	0.97898	0.97990	0.98067	0.98132	0.98189
2.4	0.87433	0.93077	0.95206	0.96282	0.96919	0.97335	0.97627	0.97841	0.98005	0.98134	0.98238	0.98324	0.98396	0.98457	0.98509
2.5	0.87888	0.93519	0.95615	0.96662	0.97275	0.97674	0.97950	0.98153	0.98307	0.98428	0.98525	0.98604	0.98671	0.98727	0.98775
2.6	0.88312	0.93923	0.95981	0.96998	0.97588	0.97967	0.98229	0.98419	0.98563	0.98675	0.98765	0.98839	0.98900	0.98951	0.98995
2.7	0.88709	0.94292	0.96311	0.97295	0.97861	0.98221	0.98468	0.98646	0.98780	0.98884	0.98967	0.99035	0.99090	0.99137	0.99177
2.8	0.89081	0.94630	0.96607	0.97559	0.98100	0.98442	0.98674	0.98840	0.98964	0.99060	0.99136	0.99198	0.99249	0.99291	0.99327
2.9	0.89430	0.94941	0.96875	0.97794	0.98310	0.98633	0.98851	0.99005	0.99120	0.99208	0.99278	0.99334	0.99380	0.99418	0.99450
3.0	0.89758	0.95227	0.97117	0.98003	0.98495	0.98800	0.99003	0.99146	0.99252	0.99333	0.99396	0.99447	0.99488	0.99522	0.99551
3.1	0.90067	0.95490	0.97335	0.98189	0.98657	0.98944	0.99134	0.99267	0.99364	0.99437	0.99495	0.99541	0.99578	0.99608	0.99634
3.2	0.90359	0.95733	0.97533	0.98355	0.98800	0.99070	0.99247	0.99369	0.99458	0.99525	0.99577	0.99618	0.99652	0.99679	0.99702
3.3	0.90634	0.95958	0.97713	0.98503	0.98926	0.99180	0.99344	0.99457	0.99539	0.99599	0.99646	0.99683	0.99713	0.99737	0.99757
3.4	0.90895	0.96166	0.97877	0.98636	0.99037	0.99275	0.99428	0.99532	0.99606	0.99661	0.99704	0.99737	0.99763	0.99784	0.99802
3.5	0.91141	0.96359	0.98026	0.98755	0.99136	0.99359	0.99500	0.99596	0.99664	0.99714	0.99751	0.99781	0.99804	0.99823	0.99839
3.6	0.91375	0.96538	0.98162	0.98862	0.99223	0.99432	0.99563	0.99651	0.99713	0.99758	0.99792	0.99818	0.99838	0.99855	0.99869
3.7	0.91598	0.96705	0.98286	0.98958	0.99300	0.99496	0.99617	0.99698	0.99754	0.99795	0.99825	0.99848	0.99866	0.99881	0.99893
3.8	0.91809	0.96860	0.98400	0.99045	0.99369	0.99552	0.99664	0.99738	0.99789	0.99826	0.99853	0.99874	0.99890	0.99902	0.99913
3.9	0.92010	0.97005	0.98504	0.99123	0.99430	0.99601	0.99705	0.99773	0.99819	0.99852	0.99876	0.99894	0.99909	0.99920	0.99929
4.0	0.92202	0.97140	0.98600	0.99193	0.99484	0.99644	0.99741	0.99803	0.99844	0.99874	0.99896	0.99912	0.99924	0.99934	0.99942

Table 2: The Left-tailed Probabilities $P(T < t)$ for positive t , with $df=16-30$

t	df 16	df 17	df 18	df 19	df 20	df 21	df 22	df 23	df 24	df 25	df 26	df 27	df 28	df 29	df 30
0.0	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000
0.1	0.53921	0.53924	0.53928	0.53930	0.53933	0.53935	0.53937	0.53939	0.53941	0.53943	0.53944	0.53946	0.53947	0.53948	0.53950
0.2	0.57800	0.57807	0.57814	0.57820	0.57825	0.57830	0.57834	0.57838	0.57842	0.57845	0.57848	0.57851	0.57854	0.57856	0.57858
0.3	0.61598	0.61609	0.61619	0.61628	0.61636	0.61644	0.61650	0.61656	0.61662	0.61667	0.61672	0.61676	0.61680	0.61684	0.61688
0.4	0.65278	0.65293	0.65307	0.65319	0.65330	0.65340	0.65349	0.65358	0.65365	0.65372	0.65379	0.65385	0.65390	0.65396	0.65400
0.5	0.68806	0.68826	0.68843	0.68859	0.68873	0.68886	0.68898	0.68909	0.68919	0.68928	0.68936	0.68944	0.68951	0.68958	0.68964
0.6	0.72155	0.72179	0.72201	0.72220	0.72238	0.72254	0.72268	0.72281	0.72294	0.72305	0.72315	0.72325	0.72333	0.72342	0.72349
0.7	0.75301	0.75330	0.75356	0.75379	0.75400	0.75420	0.75437	0.75453	0.75467	0.75480	0.75493	0.75504	0.75515	0.75525	0.75534
0.8	0.78229	0.78263	0.78293	0.78320	0.78344	0.78367	0.78387	0.78405	0.78422	0.78438	0.78452	0.78465	0.78478	0.78489	0.78500
0.9	0.80927	0.80965	0.81000	0.81031	0.81059	0.81084	0.81107	0.81128	0.81147	0.81165	0.81181	0.81196	0.81210	0.81223	0.81236
1.0	0.83390	0.83433	0.83472	0.83506	0.83537	0.83565	0.83591	0.83614	0.83636	0.83655	0.83674	0.83691	0.83706	0.83721	0.83735
1.1	0.85620	0.85667	0.85709	0.85746	0.85780	0.85811	0.85839	0.85864	0.85888	0.85909	0.85929	0.85948	0.85965	0.85981	0.85996
1.2	0.87620	0.87670	0.87715	0.87756	0.87792	0.87825	0.87855	0.87882	0.87907	0.87931	0.87952	0.87972	0.87990	0.88007	0.88023
1.3	0.89399	0.89452	0.89500	0.89542	0.89581	0.89616	0.89647	0.89676	0.89703	0.89727	0.89750	0.89770	0.89790	0.89808	0.89825
1.4	0.90970	0.91025	0.91074	0.91118	0.91158	0.91194	0.91227	0.91257	0.91285	0.91310	0.91333	0.91355	0.91375	0.91394	0.91411
1.5	0.92346	0.92402	0.92452	0.92498	0.92538	0.92575	0.92609	0.92639	0.92667	0.92693	0.92717	0.92739	0.92760	0.92779	0.92797
1.6	0.93542	0.93599	0.93650	0.93695	0.93736	0.93773	0.93807	0.93838	0.93866	0.93892	0.93916	0.93938	0.93959	0.93978	0.93996
1.7	0.94576	0.94632	0.94683	0.94728	0.94768	0.94805	0.94839	0.94869	0.94897	0.94923	0.94947	0.94969	0.94989	0.95008	0.95026
1.8	0.95463	0.95518	0.95568	0.95612	0.95652	0.95688	0.95720	0.95750	0.95778	0.95803	0.95826	0.95848	0.95868	0.95886	0.95904
1.9	0.96220	0.96273	0.96321	0.96364	0.96403	0.96437	0.96469	0.96498	0.96524	0.96549	0.96571	0.96592	0.96611	0.96629	0.96646
2.0	0.96861	0.96913	0.96959	0.97000	0.97037	0.97070	0.97100	0.97128	0.97153	0.97176	0.97198	0.97217	0.97236	0.97253	0.97269
2.1	0.97403	0.97452	0.97495	0.97534	0.97569	0.97601	0.97629	0.97655	0.97679	0.97701	0.97721	0.97740	0.97757	0.97773	0.97788
2.2	0.97858	0.97904	0.97945	0.97981	0.98014	0.98043	0.98070	0.98094	0.98116	0.98137	0.98155	0.98173	0.98189	0.98204	0.98218
2.3	0.98238	0.98281	0.98319	0.98352	0.98383	0.98410	0.98435	0.98457	0.98478	0.98496	0.98514	0.98530	0.98544	0.98558	0.98571
2.4	0.98554	0.98594	0.98629	0.98660	0.98688	0.98713	0.98735	0.98756	0.98775	0.98792	0.98807	0.98822	0.98836	0.98848	0.98860
2.5	0.98816	0.98853	0.98885	0.98913	0.98938	0.98961	0.98982	0.99000	0.99017	0.99033	0.99047	0.99060	0.99072	0.99084	0.99094
2.6	0.99033	0.99066	0.99095	0.99121	0.99144	0.99164	0.99183	0.99200	0.99215	0.99229	0.99242	0.99253	0.99264	0.99274	0.99284
2.7	0.99211	0.99241	0.99267	0.99291	0.99311	0.99330	0.99346	0.99361	0.99375	0.99387	0.99398	0.99409	0.99419	0.99427	0.99436
2.8	0.99358	0.99385	0.99408	0.99429	0.99447	0.99464	0.99478	0.99491	0.99504	0.99515	0.99525	0.99534	0.99542	0.99550	0.99557
2.9	0.99478	0.99502	0.99523	0.99541	0.99557	0.99572	0.99585	0.99596	0.99607	0.99617	0.99625	0.99633	0.99641	0.99648	0.99654
3.0	0.99576	0.99597	0.99616	0.99632	0.99646	0.99659	0.99670	0.99680	0.99690	0.99698	0.99706	0.99713	0.99719	0.99725	0.99731
3.1	0.99656	0.99675	0.99691	0.99705	0.99718	0.99729	0.99739	0.99748	0.99756	0.99763	0.99769	0.99775	0.99781	0.99786	0.99791
3.2	0.99721	0.99738	0.99752	0.99764	0.99775	0.99785	0.99793	0.99801	0.99808	0.99814	0.99820	0.99825	0.99830	0.99834	0.99838
3.3	0.99774	0.99788	0.99801	0.99812	0.99821	0.99830	0.99837	0.99843	0.99849	0.99855	0.99860	0.99864	0.99868	0.99872	0.99875
3.4	0.99817	0.99830	0.99840	0.99850	0.99858	0.99865	0.99871	0.99877	0.99882	0.99887	0.99891	0.99894	0.99898	0.99901	0.99904
3.5	0.99852	0.99863	0.99872	0.99880	0.99887	0.99893	0.99899	0.99904	0.99908	0.99912	0.99915	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926
3.6	0.99880	0.99890	0.99898	0.99905	0.99911	0.99916	0.99920	0.99924	0.99928	0.99931	0.99934	0.99937	0.99939	0.99941	0.99943
3.7	0.99903	0.99911	0.99918	0.99924	0.99929	0.99934	0.99937	0.99941	0.99944	0.99947	0.99949	0.99951	0.99953	0.99955	0.99957
3.8	0.99921	0.99928	0.99934	0.99940	0.99944	0.99948	0.99951	0.99954	0.99956	0.99959	0.99961	0.99963	0.99964	0.99966	0.99967
3.9	0.99936	0.99942	0.99948	0.99952	0.99956	0.99959	0.99962	0.99964	0.99966	0.99968	0.99970	0.99971	0.99973	0.99974	0.99975
4.0	0.99948	0.99954	0.99958	0.99962	0.99965	0.99968	0.99970	0.99972	0.99974	0.99975	0.99977	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981