

MAT220 講義15：母平均の仮説検定

目次

1	仮説検定の復習	2
1.1	推定と仮説検定	2
1.2	統計的検定の一般的な構成	3
1.3	異なる裾、異なるP値	4
2	σ が既知の場合の μ の検定	4
2.1	一般的な考え方	4
2.2	例1：コーヒー豆の袋	6
3	σ が未知の場合の μ の検定	7
3.1	前の方法が使えない理由	7
3.2	スチューデントの t 分布の復習	8
3.3	σ が未知の場合の μ の検定	9
3.4	例2：重量不足のおにぎり	10
4	二項分布の成功確率 p の検定	12
4.1	標本比率の標本分布	12
4.2	例3：ペナルティーキック	14
5	まとめ	15
6	付録：スチューデントの t 分布の表	16

講義14では、仮説検定の一般的な考え方を紹介しました。帰無仮説と対立仮説の立て方、P値の解釈方法、そしてP値を有意水準と比較する方法を学びました。この講義では、検定の中心となる確率計算に注目します。次の3つの重要な状況を扱います：

1. σ が既知の場合に母平均 μ を検定する場合、
2. σ が未知の場合に母平均 μ を検定する場合、
3. 二項分布の成功確率 p を検定する場合。

これから見るように、この3つの状況は、中心となる確率計算は異なるものの、同じ一般的な流れに従います。

1 仮説検定の復習

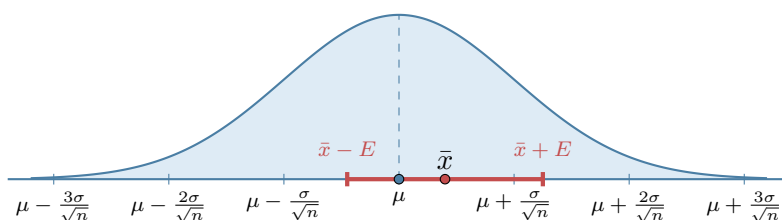
1.1 推定と仮説検定

未知の母集団パラメータを推定するときは、標本を取り、その推定値を中心として妥当と思われる値の区間を構成します。例えば、母平均を推定するときは、観測された標本平均を中心とする信頼区間を構成することがあります：

$$[\bar{x} - E, \bar{x} + E].$$

ここで、真の母平均 μ は未知です。区間の大きさは、選択した割合で μ を捕らえるように計算されます。つまり、大きさ n の標本を繰り返し取り、それぞれの標本平均の周りに信頼区間を構成した場合、そのうち一定の割合の区間が実際の μ を含むようにします。

この構成には中心極限定理を使用します。中心極限定理によれば、標本平均 $\bar{X}$ は、平均 μ 、分散 $\frac{\sigma^2}{n}$ を持つ独自の確率分布に従います。¹ この分布の中に、 $\bar{x}$ とその信頼区間が位置します：



仮説検定を行うときは、この考え方を完全に逆転させます。まず母集団パラメータが特定の値であると仮定し、その仮定のもとで、観測された標本データが妥当であるかどうかを考えます。例えば、帰無仮説が

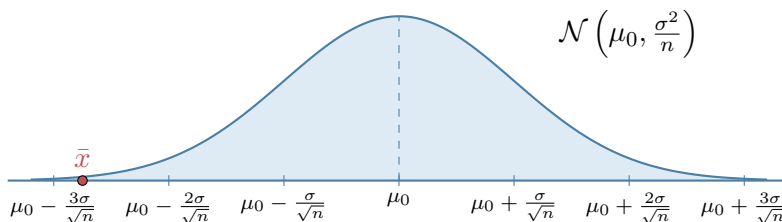
$$H_0 : \mu = \mu_0$$

であるとしします。

真の母平均が実際に μ_0 であると仮定し、その仮定から生じる結果を調べます。 H_0 が正しいければ、中心極限定理により、標本分布は次のようになります：

$$\bar{X} \approx \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

したがって、観測された標本平均 $\bar{x}$ は、この分布のどこかに位置するはずですが、実際のデータから標本を取り、その標本平均 $\bar{x}$ が分布の裾の非常に遠い位置に現れた場合、そのデータは H_0 のもとでは起こりにくいと考えられます：



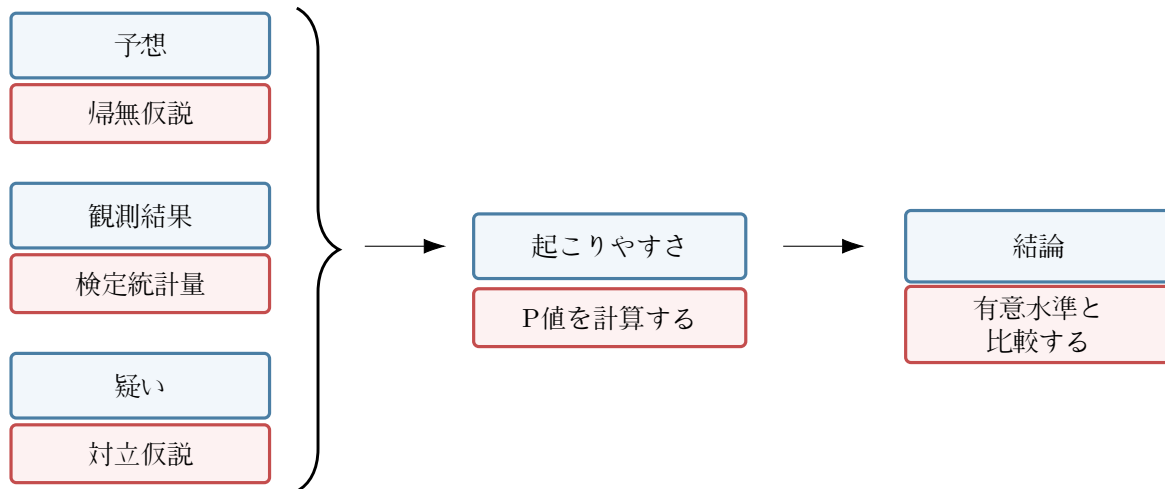
¹厳密には、母集団が正規分布でない限り、 n は十分に大きい必要があります。通常は、大きさが30以上の標本を使用します。

この2つの方法は非常によく似ているように見えますが、重要な違いがあります：

- 推定では、母集団パラメータは未知であり、妥当と思われる値の区間を構成します。
- 仮説検定では、母集団パラメータが特定の値であると仮定し、その仮定のもとで観測データが妥当であるかを考えます。

1.2 統計的検定の一般的な構成

講義14で学んだ、統計的検定の一般的な構成を思い出してください：



第1段階では、状況を読み取り、解釈します。次のものを確認します：

- 検定する主張
- その主張に対する疑い
- 関係する標本情報

第2段階では、中心となる確率計算を行います。その値はP値と呼ばれます。次に判断を行います。得られたP値を選択した有意水準と比較し、標本が帰無仮説を棄却するのに十分な証拠を与えているかどうかを決定します。

重要な定義

- 帰無仮説 (H_0) : 検定したい主張。
- 対立仮説 (H_1) : 私たちの疑いを表す、帰無仮説と競合する主張。
- 検定統計量 : 標本データから得られる数値情報。
- P値 : H_0 が正しいと仮定したとき、観測された検定統計量、またはそれより極端な値が得られる確率。
- 有意水準 (α) : どの程度の低い確率を「受け入れられないほど起こりにくい」と判断するかを示す基準。

1.3 異なる裾、異なるP値

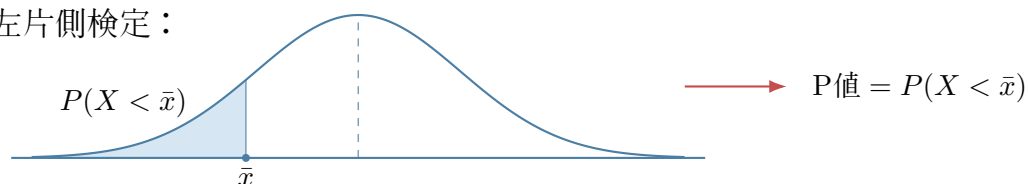
P値が帰無仮説そのものの正しさの確率を表していると考える学生は少なくありません。実際には、これは正しくありません。P値は、帰無仮説が正しい場合に、観測された標本、またはそれより極端な結果がどの程度珍しいかを測るものです。

対立仮説は、どの結果を観測された標本データよりも「極端」と数えるかを決定します。対立仮説には、一般に次の3つの形があります：

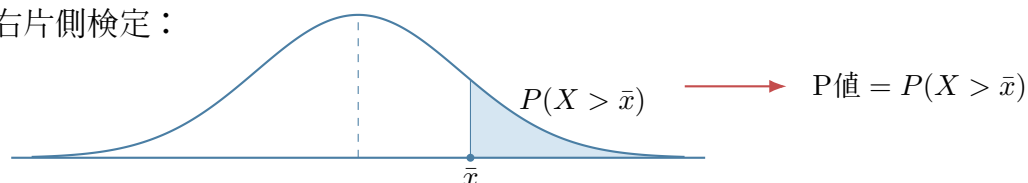
$$H_1 : \begin{cases} \text{真の値} < \text{主張された値}, & \text{左片側検定}, \\ \text{真の値} > \text{主張された値}, & \text{右片側検定}, \\ \text{真の値} \neq \text{主張された値}, & \text{両側検定}. \end{cases}$$

対立仮説の内容に応じて、どの裾を考えるかが変わり、P値の計算も変わります：

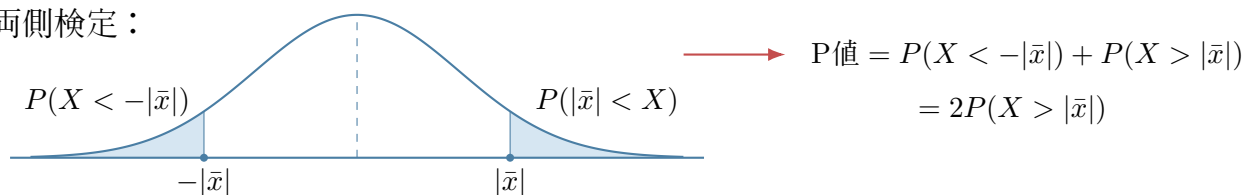
左片側検定：



右片側検定：



両側検定：



2 σ が既知の場合の μ の検定

2.1 一般的な考え方

母平均 μ についての主張を検定したいとし、母標準偏差 σ が既知であるとします。この場合、帰無仮説は次の形になります：

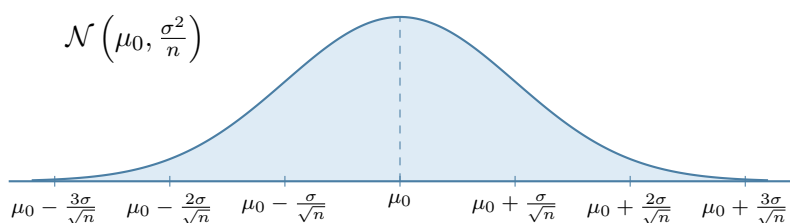
$$H_0 : \mu = \mu_0,$$

ここで μ_0 は、主張されている μ の値です。通常、標本データとして、標本サイズ n と標本平均 $\bar{x}$ の具体的な値が与えられます。

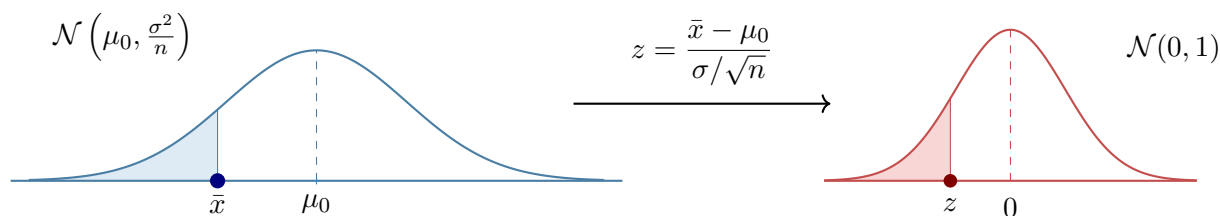
関係するP値を計算するため、帰無仮説が正しいと仮定します。つまり、母平均が実際に μ_0 であると仮定します。この仮定のもとで、中心極限定理により、標本平均の標本分布は次のパラメータを持ちます：

$$\bar{X} \approx \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

つまり、この正規分布の中心は主張された平均 μ_0 であり、標準誤差は $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ です。



ある $\bar{x}$ 、またはそれより極端な値が得られる確率を計算したい場合、その面積を標準正規分布の面積に変換する必要があります。2つの分布を結び付けるのが、よく知られた z スコアの公式です。例えば、左片側検定では、観測値 $\bar{x}$ に対応するP値は、次のような面積になります：



標本分布の中心は μ_0 、標準誤差は $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であるため、次の公式を使うことができます：

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

P値の具体的な計算方法は、どの種類の検定を行うかによって異なります。第1節の議論により、次のいずれかを計算します：

- 左片側検定の場合は $P\left(Z < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$
- 右片側検定の場合は $P\left(Z > \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$
- 両側検定の場合は $2P\left(Z > \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right)$

σ が既知の場合の μ の検定

母標準偏差 σ が既知の場合、次の検定統計量を使用します：

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

得られた値に対応する確率は、標準正規分布 $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ の z 表を使って計算できます。

2.2 例1：コーヒー豆の袋

コーヒー豆の袋を製造する会社で働いているとします。袋の平均重量は150 g であることになっていますが、真の平均重量はこれよりも小さいのではないかと疑っています。

この疑いを検定するため、30袋の単純無作為標本を取り、標本平均 $\bar{x} = 145$ g を得ました。過去のデータから、母標準偏差は $\sigma = 15$ g であることが分かっています。有意水準 $\alpha = 0.01$ を使って検定を行います。

ステップ1：情報を確認する

設定から、重要な値は次のとおりです：

$$\mu_0 = 150, \quad n = 30, \quad \bar{x} = 145, \quad \sigma = 15, \quad \alpha = 0.01.$$

会社は母平均が150 g であると主張していますが、私たちは150 g より小さいと疑っています。したがって、帰無仮説と対立仮説は、それぞれ

$$H_0 : \mu = 150, \quad \text{および} \quad H_1 : \mu < 150$$

です。対立仮説が「より小さい」という主張であるため、左片側検定を行います。

ステップ2：P値を計算する

真の平均が150 g であると仮定すると、中心極限定理により、標本分布は近似的に次のパラメータを持つ正規分布になります：

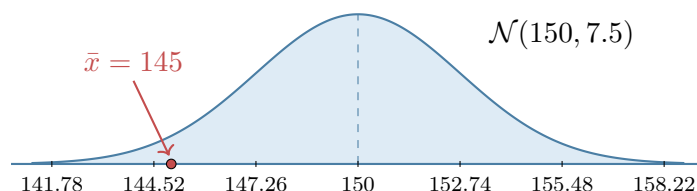
$$\bar{X} \approx \mathcal{N}\left(150, \frac{15^2}{30}\right) = \mathcal{N}(150, 7.5).$$

ここで、標準誤差は

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{7.5} \approx 2.74$$

です。

したがって、帰無仮説のもとでの標本分布の横軸は、およそ次のように表示できます：



次に、 z スコアを計算します：

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{145 - 150}{15/\sqrt{30}} \approx -1.83.$$

したがって、 $\bar{X}$ が145 g より小さくなる確率は、 Z が -1.83 より小さくなる確率を求めることで計算できます。 z 表を使うと、

$$P(\bar{X} < 145) = P(Z < -1.83) \approx 0.0336.$$

左片側検定を行っているため、これがP値です。別の言い方をすると、真の平均重量が実際に150 g であった場合、この大きさの標本から145 g 以下の標本平均が得られる確率は約3.36% です。

ステップ3：P値と α を比較する

P値と α を直接比較すると、

$$0.0336 > 0.01.$$

したがって、有意水準1% では H_0 を棄却しません。

ステップ4：解釈を述べる

解釈の一例は次のとおりです。

解釈

1% の有意水準において、コーヒー豆の袋の真の平均重量が150 g より小さいと示す説得力のある証拠は、この標本からは得られませんでした。

3 σ が未知の場合の μ の検定

3.1 前の方法が使えない理由

再び

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

を検定したいとします。ただし、今回は母標準偏差 σ が未知です。前の節では、

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

という z スコアの公式を使ってP値を計算しました。

しかし、 σ が未知である場合、この値を実際に計算することはできません。代わりに、講義13と同様に、標本標準偏差 s を使って σ を推定する必要があります。上の公式で σ を s に置き換えると、次の別の量が得られます：

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

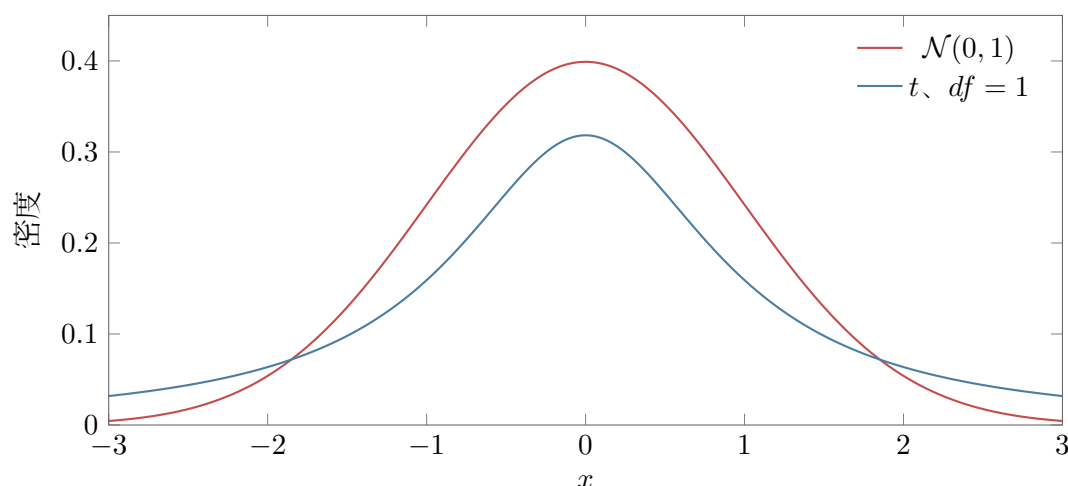
しかし、講義13で見たように、この量はもはや正規分布には従いません。 σ を推定することで不確実性がさらに加わるため、スチューデントの t 分布を使用する必要があります。ここで、この内容を簡単に復習します。

3.2 スチューデントの t 分布の復習

元の母集団が平均 μ の正規分布に従うと仮定します。大きさ n の標本について、標本平均を $\bar{X}$ 、標本標準偏差を S とします。ここでは S 自体も確率変数として考えます。このとき、

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

は、自由度 $df = n - 1$ のスチューデントの t 分布に従います。スチューデントの t 分布は標準正規分布に似ていますが、裾がより厚くなっています：

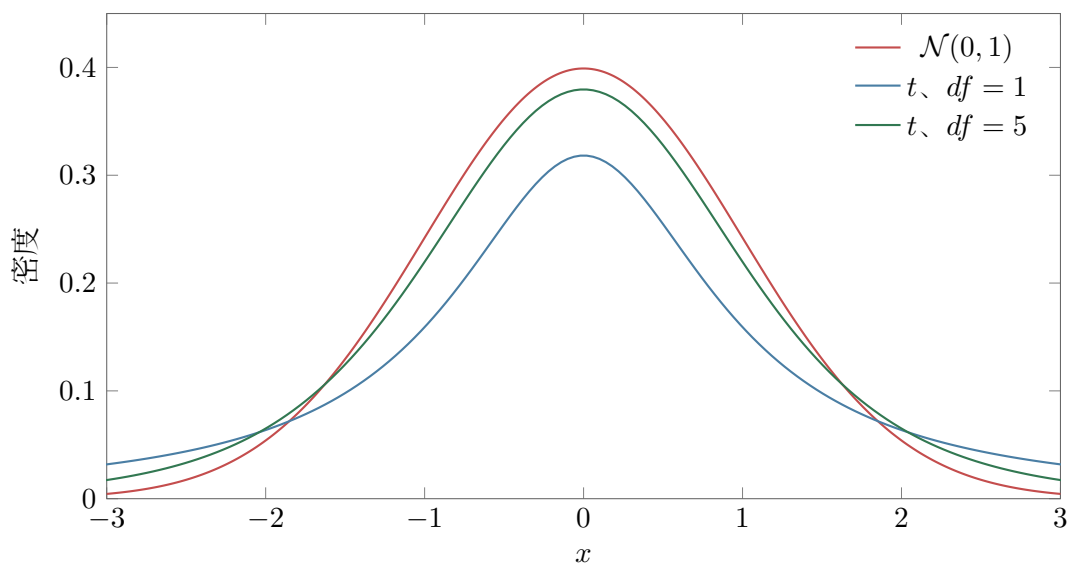


特に、これらの分布は標準正規分布と同じ性質を多く持っています：

- 0 を中心として対称です。
- 曲線の下総面積は1 です。
- 確率は曲線の下総面積に対応します。

一方で、重要な違いもあります。まず、 t 分布は1つだけではありません。自由度 df の値に応じて異なる曲線からなる、分布の族があります。

ここでの考え方は、標本サイズを大きくすると、最初の観測値に含まれる偶然のばらつきが最終的には打ち消し合い、真の値 σ をより正確に推定できるようになるというものです。予想されるように、 n を大きくすると s は σ に近づく傾向があり、 t 分布も $\mathcal{N}(0, 1)$ にますます近づきます：



3.3 σ が未知の場合の μ の検定

第2節の z スコアの公式を使う代わりに、 σ が分からない場合は、次の t 統計量を使用します：

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}},$$

ここでも、 μ_0 は母平均 μ の仮定された値です。この公式を使うと、標本観測値に対応するP値を計算できます。

σ が未知の場合の μ の検定

母標準偏差 σ が未知の場合、次の式を使用します：

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

得られた値を使って、自由度 $df = n - 1$ のスチューデントの t 分布の確率を計算し、観測された標本のP値を求めることができます。

ここでも、具体的なP値は対立仮説の内容によって決まります：

$$H_1 : \mu < \mu_0 \implies \text{P値} = P(T < t),$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \implies \text{P値} = P(T > t),$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \implies \text{P値} = 2P(T > |t|).$$

もちろん、この段階で明らかに生じる疑問は、これらの確率を実際にどのように計算するかということです。これまで、正規分布の確率を求める場合は、 z スコアを計算し、表から確率 $P(Z < z)$ を読み取りました。

同様に、スチューデントの t 分布にも対応する表があります。下の付録にその表を掲載しています。考え方は講義10の z 表と基本的に同じです。 t の値を計算し、表から対応する確率 $P(T < t)$ を読み取ります。

$P(T > t)$ や $P(t_1 < T < t_2)$ のような確率が必要な場合は、正規分布の場合と同じ方法を使うことができます：

t 分布におけるその他の面積の求め方

- t より左側の面積： $P(T < t)$ を表から直接読み取ります。
- t より右側の面積： $P(T > t) = 1 - P(T < t)$ を使います。
- 2つの値の間の面積： $P(t_1 < T < t_2) = P(T < t_2) - P(T < t_1)$ を使います。
- 負の値： 対称性により、 $t > 0$ のとき、

$$P(T < -t) = 1 - P(T < t).$$

表における主な違いは精度です。 z 表では小数第2位までの z 値を調べることができますが、 t 表では小数第1位までの t 値しか調べることができません。また、表には自由度 df のさまざまな値に対する答えが、30 まで掲載されています。

演習

付録の左側確率の t 表を使って、次の値を求めなさい：

- (a) $df = 18$ のときの $P(T < 1.3)$
- (b) $df = 7$ のときの $P(T < -2.0)$
- (c) $df = 12$ のときの $P(T > 1.8)$

解答

(a)

$$P(T < 1.3) \approx 0.8950.$$

(b)

$$P(T < -2.0) \approx 0.0428.$$

(c) 表から、

$$P(T < 1.8) \approx 0.9515.$$

したがって、

$$P(T > 1.8) = 1 - P(T < 1.8) \approx 1 - 0.9515 = 0.0485.$$

3.4 例2：重量不足のおにぎり

毎日、コンビニで同じ「200 g」と表示されたおにぎりを買っているとします。しかし、会社が顧客に誤解を与えており、真の平均重量は実際には200 g より小さいのではないかと疑っています。

この疑いを検定するため、7月の31日間、それぞれの日に無作為に選んだおにぎりを1個ずつ量ります。この標本から、標本平均 $\bar{x} = 197$ g、標本標準偏差 $s = 9$ g を得ました。

有意水準 $\alpha = 0.05$ を使って検定を行います。

ステップ1：情報を確認する

設定から、重要な値は次のとおりです：

$$\mu_0 = 200, \quad n = 31, \quad \bar{x} = 197, \quad s = 9, \quad \alpha = 0.05.$$

会社は母平均が200 g であると主張していますが、私たちは200 g より小さいと疑っています。したがって、帰無仮説と対立仮説は、それぞれ

$$H_0 : \mu = 200, \quad \text{および} \quad H_1 : \mu < 200$$

です。対立仮説が「より小さい」という主張であるため、左片側検定を行います。

ステップ2：P値を計算する

前の例では、真の母標準偏差 σ が分かっていたため、標準正規分布を使用することができました。しかし、この例では、標本標準偏差 $s = 9$ しか分かっていません。したがって、代わりに t 統計量を計算する必要があります：

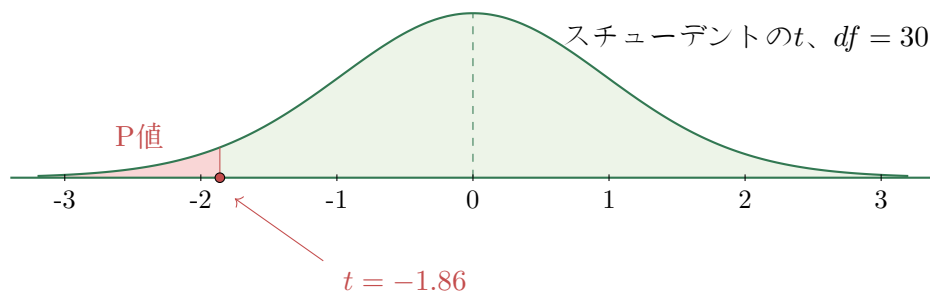
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{197 - 200}{9/\sqrt{31}} \approx -1.86.$$

標本サイズは $n = 31$ なので、自由度は

$$df = n - 1 = 31 - 1 = 30$$

です。

したがって、帰無仮説が正しいと仮定すると、計算された値 $t = -1.86$ は、自由度 $df = 30$ のスチューデントの t 分布の中に位置します：



左片側検定を行っているため、P値は -1.86 以下の t 統計量が得られる確率です：

$$P\text{値} = P(T < -1.86), \quad df = 30.$$

t 表には小数第1位までの値しか掲載されていないため、 -1.86 は表にある -1.9 と -1.8 の間にあります。表から、

$$P(T < -1.9) \approx 0.03354$$

および

$$P(T < -1.8) \approx 0.04096$$

です。

-1.86 はこれら2つの値の間にあるため、その中点を取ってP値を推定します：

$$P\text{値} \approx \frac{0.03354 + 0.04096}{2} = 0.03725.$$

別の言い方をすると、真の平均重量が実際に200 g であった場合、この大きさの標本から-1.86 以下の t 統計量が得られる確率は約3.7% です。

ステップ3：P値と α を比較する

P値と α を直接比較すると、

$$0.03725 < 0.05.$$

したがって、有意水準5% では H_0 を棄却します。

ステップ4：解釈を述べる

解釈

5% の有意水準において、おにぎりの真の平均重量が表示されている200 g より小さいと示す説得力のある証拠が、この標本から得られました。

4 二項分布の成功確率 p の検定

4.1 標本比率の標本分布

未知の成功確率 p を持つ二項実験を考えます。標本として、その実験を n 回行い、 r 回の成功と $n - r$ 回の失敗を観測したとします。この情報から、真の確率 p についての主張、つまり次の形の帰無仮説を検定できます：

$$H_0 : p = p_0.$$

標本データから、標本比率

$$\hat{p} = \frac{r}{n}$$

を計算できます。帰無仮説が正しいと仮定すると、この二項実験の正規近似は、次のパラメータを持つ $\hat{P}$ の標本分布になります：

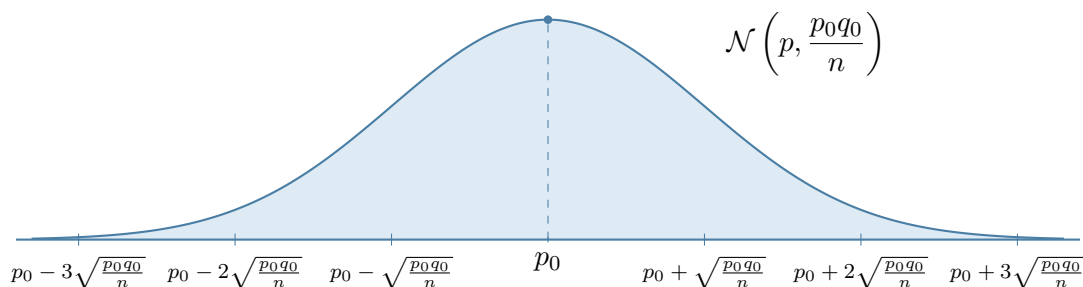
$$\hat{P} \approx \mathcal{N}\left(p_0, \frac{p_0 q_0}{n}\right),$$

ここで $q_0 = 1 - p_0$ です。

幾何学的には、この分布の中心は主張された値 p_0 であり、標準誤差は

$$\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$$

です。したがって、正規分布の横軸はこの量を単位として区切られます：



したがって、対応する z スコアは

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}.$$

二項分布の成功確率 p の検定

二項分布の真の成功確率 p を検定するときは、次の検定統計量を使用します：

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}},$$

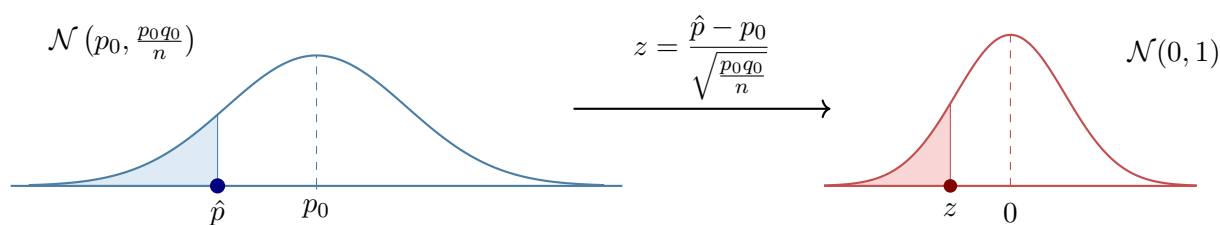
ここで、

$$\hat{p} = \frac{r}{n} \quad \text{および} \quad q_0 = 1 - p_0$$

です。

得られた値に対応する確率は、標準正規分布 $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ の z 表を使って計算できます。

第2節の場合と同様に、この公式は確率計算を標準正規分布の面積に変換します。その面積は z 表から求めることができます。上のボックスの公式が標準正規分布との対応を与えるため、面積を簡単に計算できます：



近似を使用する前に、必ず $np_0 \geq 5$ と $nq_0 \geq 5$ を確認する必要があります。これらの条件が満たされていれば、正規近似が妥当であると考えられます。

また、仮説検定では、標準誤差は帰無仮説で主張されている値 p_0 を使って計算することに注意してください：

$$\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}.$$

これは、観測値 $\hat{p}$ と $\hat{q}$ を使用した p の信頼区間の標準誤差

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

とは異なります。

4.2 例3：ペナルティーキック

友人のジョンが、ペナルティーキックについてリオネル・メッシと同じくらい上手であると主張しているとします。メッシの通算ペナルティー成功率は78%です。

そこで、ジョンの練習を観察したところ、驚くことに55回の試行のうち52回のペナルティーを成功させました。ジョンの素晴らしい結果を見た後、彼の真の成功率はリオネル・メッシよりも高い可能性があるかと疑います。

有意水準 $\alpha = 0.01$ を使って仮説検定を行います。

ステップ1：情報を確認する

設定から、重要な値は次のとおりです：

$$p_0 = 0.78, \quad q_0 = 1 - p_0 = 0.22, \quad n = 55, \quad r = 52, \quad \alpha = 0.01.$$

ジョンの最初の主張は成功確率0.78 に対応しますが、私たちは真の確率が0.78 より大きいと疑っています。したがって、帰無仮説と対立仮説は、それぞれ

$$H_0 : p = 0.78, \quad \text{および} \quad H_1 : p > 0.78$$

です。

対立仮説が「より大きい」という主張であるため、今回は右片側検定を行います。

ステップ2：P値を計算する

正規近似を使う前に、近似の条件を確認します：

$$np_0 = 55(0.78) = 42.9 \quad \text{および} \quad nq_0 = 55(0.22) = 12.1.$$

どちらの値も5 より大きいため、正規近似は妥当です。

P値を計算するには、まず観測された標本比率を求めます：

$$\hat{p} = \frac{r}{n} = \frac{52}{55} \approx 0.945.$$

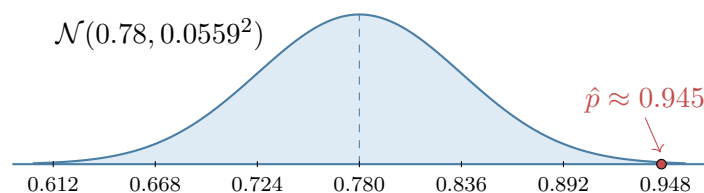
真の成功確率が $p_0 = 0.78$ であると仮定すると、正規近似により、 $\hat{P}$ の標本分布は次のパラメータを持つ正規分布に近似されます：

$$\hat{P} \approx \mathcal{N}\left(0.78, \frac{(0.78)(0.22)}{55}\right).$$

特に、この分布の中心は、主張された値 p_0 です。ここで、標準誤差は

$$\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} = \sqrt{\frac{(0.78)(0.22)}{55}} \approx 0.0559.$$

したがって、標本分布の横軸は、およそ次のように表示できます：



グラフを見るだけでも、 $\hat{p}$ が中心から非常に遠く、したがって非常に起こりにくいことが分かります。それでも、対応する z スコアを計算することで、この確率を求めることができます：

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0.945 - 0.78}{\sqrt{\frac{(0.78)(0.22)}{55}}} \approx 2.96.$$

したがって、 $\hat{P}$ が約 0.945 より大きくなる確率は、 Z が 2.96 より大きくなる確率を求めることで計算できます。 z 表を使うと、まず

$$P(Z < 2.96) = 0.99846$$

が得られます。

この値は 2.96 の左側の確率です。今回は右片側検定なので、代わりに右側の面積を求めます：

$$P(Z > 2.96) = 1 - P(Z < 2.96) = 1 - 0.99846 = 0.00154.$$

これが P 値です。別の言い方をすると、ジョンの真のペナルティー成功確率が実際に 0.78 であった場合、55 回の試行から約 0.945 以上の標本比率が得られる確率は約 0.154% です。

ステップ 3：P 値と α を比較する

P 値と α を直接比較すると、

$$0.00154 < 0.01.$$

したがって、有意水準 1% では H_0 を棄却します。

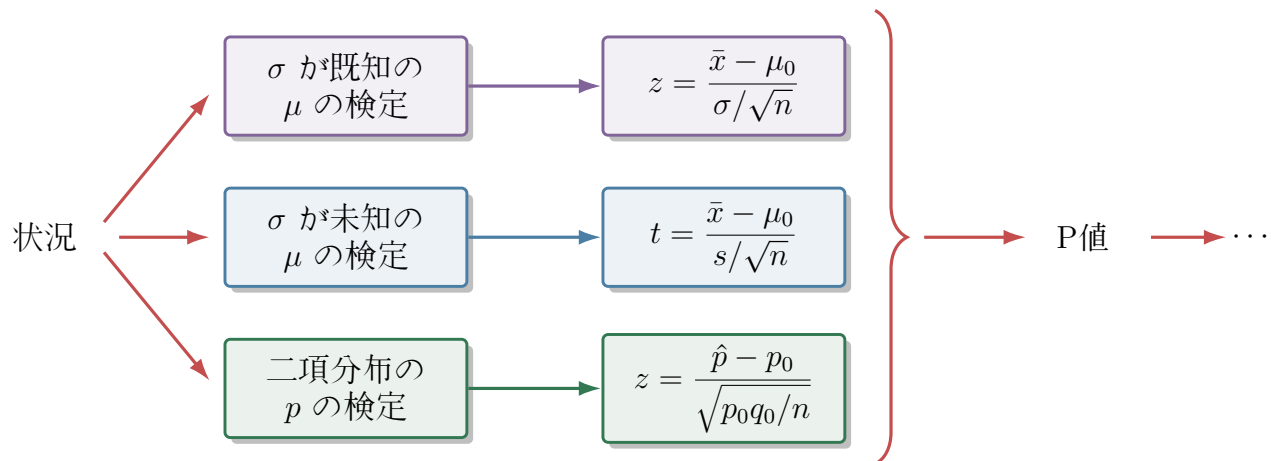
ステップ 4：解釈を述べる

解釈

1% の有意水準において、ジョンの真のペナルティー成功確率が 0.78 より大きいと示す説得力のある証拠が、彼の結果から得られました。

5 まとめ

この講義では、母集団パラメータに対する仮説検定を行う 3 つの異なる状況を学びました。一般に、与えられた問題の状況を正しく判断し、それぞれの場合にどの検定統計量を計算するべきかを理解することが重要です。大まかには、次のような流れになります：



問題の状況にかかわらず、仮説検定の全体的な流れは変わりません：

1. H_0 と H_1 を立て、標本データを整理する。
2. 適切な検定統計量とP値を計算する。
3. P値と α を比較し、 H_0 を棄却するかどうかを決定する。
4. 最後に、問題の状況に合わせて結論を述べる。

6 付録：スチューデントの t 分布の表

以下の表は、さまざまな自由度におけるスチューデントの t 分布の曲線下の面積の近似値を示しています。以前に使用した z 表とは異なり、この表では t の値は小数第1位までしか掲載されていません。

t 統計量が小数第2位まで得られた場合には、次の3つの方法を使います：

- 小数第2位が1、2、または3 の場合は、小数第1位まで切り下げます。
- 小数第2位が7、8、または9 の場合は、小数第1位まで切り上げます。
- 小数第2位が4、5、または6 の場合は、表にある最も近い2つの答えの midpoint を取ります。

表では、小数第2位の代わりに、自由度 df が1 から30 までの各値に対応する曲線下の面積が行として示されています。

Table 1: The Left-tailed Probabilities $P(T < t)$ for positive t , with $df = 1-15$

t	df 1	df 2	df 3	df 4	df 5	df 6	df 7	df 8	df 9	df 10	df 11	df 12	df 13	df 14	df 15
0.0	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000
0.1	0.53173	0.53527	0.53667	0.53742	0.53788	0.53820	0.53843	0.53860	0.53873	0.53884	0.53893	0.53900	0.53906	0.53912	0.53917
0.2	0.56283	0.57001	0.57286	0.57438	0.57532	0.57596	0.57642	0.57676	0.57704	0.57726	0.57743	0.57759	0.57771	0.57782	0.57792
0.3	0.59277	0.60376	0.60812	0.61044	0.61188	0.61285	0.61355	0.61409	0.61450	0.61484	0.61511	0.61534	0.61554	0.61571	0.61585
0.4	0.62112	0.63608	0.64203	0.64520	0.64716	0.64850	0.64946	0.65019	0.65076	0.65122	0.65159	0.65191	0.65217	0.65240	0.65260
0.5	0.64758	0.66667	0.67428	0.67834	0.68085	0.68256	0.68380	0.68473	0.68546	0.68605	0.68654	0.68694	0.68728	0.68758	0.68783
0.6	0.67202	0.69528	0.70460	0.70958	0.71267	0.71477	0.71629	0.71744	0.71835	0.71907	0.71967	0.72017	0.72059	0.72095	0.72127
0.7	0.69440	0.72180	0.73284	0.73875	0.74243	0.74493	0.74674	0.74811	0.74919	0.75006	0.75077	0.75136	0.75187	0.75230	0.75268
0.8	0.71478	0.74618	0.75890	0.76574	0.76999	0.77289	0.77500	0.77659	0.77784	0.77885	0.77968	0.78037	0.78096	0.78146	0.78190
0.9	0.73326	0.76845	0.78277	0.79050	0.79531	0.79860	0.80099	0.80280	0.80422	0.80536	0.80630	0.80709	0.80776	0.80833	0.80883
1.0	0.75000	0.78868	0.80450	0.81305	0.81839	0.82204	0.82469	0.82670	0.82828	0.82955	0.83060	0.83148	0.83222	0.83286	0.83341
1.1	0.76515	0.80698	0.82416	0.83346	0.83927	0.84325	0.84614	0.84834	0.85006	0.85145	0.85259	0.85355	0.85436	0.85506	0.85566
1.2	0.77886	0.82350	0.84187	0.85182	0.85805	0.86232	0.86541	0.86777	0.86961	0.87110	0.87233	0.87335	0.87422	0.87497	0.87563
1.3	0.79129	0.83838	0.85777	0.86827	0.87485	0.87935	0.88262	0.88510	0.88705	0.88862	0.88991	0.89099	0.89191	0.89270	0.89339
1.4	0.80257	0.85176	0.87200	0.88295	0.88980	0.89448	0.89788	0.90046	0.90249	0.90412	0.90546	0.90658	0.90754	0.90836	0.90907
1.5	0.81283	0.86380	0.88471	0.89600	0.90305	0.90786	0.91135	0.91400	0.91607	0.91775	0.91912	0.92027	0.92125	0.92209	0.92282
1.6	0.82219	0.87463	0.89605	0.90758	0.91475	0.91964	0.92318	0.92587	0.92779	0.92966	0.93105	0.93221	0.93320	0.93404	0.93478
1.7	0.83075	0.88438	0.90615	0.91782	0.92506	0.92998	0.93354	0.93622	0.93833	0.94002	0.94140	0.94256	0.94354	0.94439	0.94512
1.8	0.83859	0.89317	0.91516	0.92688	0.93412	0.93902	0.94256	0.94522	0.94730	0.94897	0.95034	0.95148	0.95245	0.95328	0.95400
1.9	0.84579	0.90109	0.92318	0.93488	0.94207	0.94692	0.95040	0.95302	0.95506	0.95669	0.95802	0.95914	0.96008	0.96089	0.96158
2.0	0.85242	0.90825	0.93034	0.94194	0.94903	0.95379	0.95719	0.95974	0.96172	0.96331	0.96460	0.96567	0.96658	0.96736	0.96803
2.1	0.85854	0.91473	0.93672	0.94817	0.95512	0.95976	0.96306	0.96553	0.96744	0.96896	0.97020	0.97123	0.97209	0.97283	0.97347
2.2	0.86420	0.92060	0.94241	0.95367	0.96045	0.96495	0.96813	0.97050	0.97233	0.97378	0.97496	0.97593	0.97675	0.97745	0.97805
2.3	0.86945	0.92593	0.94751	0.95853	0.96511	0.96945	0.97250	0.97476	0.97650	0.97787	0.97898	0.97990	0.98067	0.98132	0.98189
2.4	0.87433	0.93077	0.95206	0.96282	0.96919	0.97335	0.97627	0.97841	0.98005	0.98134	0.98238	0.98324	0.98396	0.98457	0.98509
2.5	0.87888	0.93519	0.95615	0.96662	0.97275	0.97674	0.97950	0.98153	0.98307	0.98428	0.98525	0.98604	0.98671	0.98727	0.98775
2.6	0.88312	0.93923	0.95981	0.96998	0.97588	0.97967	0.98229	0.98419	0.98563	0.98675	0.98765	0.98839	0.98900	0.98951	0.98995
2.7	0.88709	0.94292	0.96311	0.97295	0.97861	0.98221	0.98468	0.98646	0.98780	0.98884	0.98967	0.99035	0.99090	0.99137	0.99177
2.8	0.89081	0.94630	0.96607	0.97559	0.98100	0.98442	0.98674	0.98840	0.98964	0.99060	0.99136	0.99198	0.99249	0.99291	0.99327
2.9	0.89430	0.94941	0.96875	0.97794	0.98310	0.98633	0.98851	0.99005	0.99120	0.99208	0.99278	0.99334	0.99380	0.99418	0.99450
3.0	0.89758	0.95227	0.97117	0.98003	0.98495	0.98800	0.99003	0.99146	0.99252	0.99333	0.99396	0.99447	0.99488	0.99522	0.99551
3.1	0.90067	0.95490	0.97335	0.98189	0.98657	0.98944	0.99134	0.99267	0.99364	0.99437	0.99495	0.99541	0.99578	0.99608	0.99634
3.2	0.90359	0.95733	0.97533	0.98355	0.98800	0.99070	0.99247	0.99369	0.99458	0.99525	0.99577	0.99618	0.99652	0.99679	0.99702
3.3	0.90634	0.95958	0.97713	0.98503	0.98926	0.99180	0.99344	0.99457	0.99539	0.99599	0.99646	0.99683	0.99713	0.99737	0.99757
3.4	0.90895	0.96166	0.97877	0.98636	0.99037	0.99275	0.99428	0.99532	0.99606	0.99661	0.99704	0.99737	0.99763	0.99784	0.99802
3.5	0.91141	0.96359	0.98026	0.98755	0.99136	0.99359	0.99500	0.99596	0.99664	0.99714	0.99751	0.99781	0.99804	0.99823	0.99839
3.6	0.91375	0.96538	0.98162	0.98862	0.99223	0.99432	0.99563	0.99651	0.99713	0.99758	0.99792	0.99818	0.99838	0.99855	0.99869
3.7	0.91598	0.96705	0.98286	0.98958	0.99300	0.99496	0.99617	0.99698	0.99754	0.99795	0.99825	0.99848	0.99866	0.99881	0.99893
3.8	0.91809	0.96860	0.98400	0.99045	0.99369	0.99552	0.99664	0.99738	0.99789	0.99826	0.99853	0.99874	0.99890	0.99902	0.99913
3.9	0.92010	0.97005	0.98504	0.99123	0.99430	0.99601	0.99705	0.99773	0.99819	0.99852	0.99876	0.99894	0.99909	0.99920	0.99929
4.0	0.92202	0.97140	0.98600	0.99193	0.99484	0.99644	0.99741	0.99803	0.99844	0.99874	0.99896	0.99912	0.99924	0.99934	0.99942

Table 2: The Left-tailed Probabilities $P(T < t)$ for positive t , with $df=16-30$

t	df 16	df 17	df 18	df 19	df 20	df 21	df 22	df 23	df 24	df 25	df 26	df 27	df 28	df 29	df 30
0.0	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000
0.1	0.53921	0.53924	0.53928	0.53930	0.53933	0.53935	0.53937	0.53939	0.53941	0.53943	0.53944	0.53946	0.53947	0.53948	0.53950
0.2	0.57800	0.57807	0.57814	0.57820	0.57825	0.57830	0.57834	0.57838	0.57842	0.57845	0.57848	0.57851	0.57854	0.57856	0.57858
0.3	0.61598	0.61609	0.61619	0.61628	0.61636	0.61644	0.61650	0.61656	0.61662	0.61667	0.61672	0.61676	0.61680	0.61684	0.61688
0.4	0.65278	0.65293	0.65307	0.65319	0.65330	0.65340	0.65349	0.65358	0.65365	0.65372	0.65379	0.65385	0.65390	0.65396	0.65400
0.5	0.68806	0.68826	0.68843	0.68859	0.68873	0.68886	0.68898	0.68909	0.68919	0.68928	0.68936	0.68944	0.68951	0.68958	0.68964
0.6	0.72155	0.72179	0.72201	0.72220	0.72238	0.72254	0.72268	0.72281	0.72294	0.72305	0.72315	0.72325	0.72333	0.72342	0.72349
0.7	0.75301	0.75330	0.75356	0.75379	0.75400	0.75420	0.75437	0.75453	0.75467	0.75480	0.75493	0.75504	0.75515	0.75525	0.75534
0.8	0.78229	0.78263	0.78293	0.78320	0.78344	0.78367	0.78387	0.78405	0.78422	0.78438	0.78452	0.78465	0.78478	0.78489	0.78500
0.9	0.80927	0.80965	0.81000	0.81031	0.81059	0.81084	0.81107	0.81128	0.81147	0.81165	0.81181	0.81196	0.81210	0.81223	0.81236
1.0	0.83390	0.83433	0.83472	0.83506	0.83537	0.83565	0.83591	0.83614	0.83636	0.83655	0.83674	0.83691	0.83706	0.83721	0.83735
1.1	0.85620	0.85667	0.85709	0.85746	0.85780	0.85811	0.85839	0.85864	0.85888	0.85909	0.85929	0.85948	0.85965	0.85981	0.85996
1.2	0.87620	0.87670	0.87715	0.87756	0.87792	0.87825	0.87855	0.87882	0.87907	0.87931	0.87952	0.87972	0.87990	0.88007	0.88023
1.3	0.89399	0.89452	0.89500	0.89542	0.89581	0.89616	0.89647	0.89676	0.89703	0.89727	0.89750	0.89770	0.89790	0.89808	0.89825
1.4	0.90970	0.91025	0.91074	0.91118	0.91158	0.91194	0.91227	0.91257	0.91285	0.91310	0.91333	0.91355	0.91375	0.91394	0.91411
1.5	0.92346	0.92402	0.92452	0.92498	0.92538	0.92575	0.92609	0.92639	0.92667	0.92693	0.92717	0.92739	0.92760	0.92779	0.92797
1.6	0.93542	0.93599	0.93650	0.93695	0.93736	0.93773	0.93807	0.93838	0.93866	0.93892	0.93916	0.93938	0.93959	0.93978	0.93996
1.7	0.94576	0.94632	0.94683	0.94728	0.94768	0.94805	0.94839	0.94869	0.94897	0.94923	0.94947	0.94969	0.94989	0.95008	0.95026
1.8	0.95463	0.95518	0.95568	0.95612	0.95652	0.95688	0.95720	0.95750	0.95778	0.95803	0.95826	0.95848	0.95868	0.95886	0.95904
1.9	0.96220	0.96273	0.96321	0.96364	0.96403	0.96437	0.96469	0.96498	0.96524	0.96549	0.96571	0.96592	0.96611	0.96629	0.96646
2.0	0.96861	0.96913	0.96959	0.97000	0.97037	0.97070	0.97100	0.97128	0.97153	0.97176	0.97198	0.97217	0.97236	0.97253	0.97269
2.1	0.97403	0.97452	0.97495	0.97534	0.97569	0.97601	0.97629	0.97655	0.97679	0.97701	0.97721	0.97740	0.97757	0.97773	0.97788
2.2	0.97858	0.97904	0.97945	0.97981	0.98014	0.98043	0.98070	0.98094	0.98116	0.98137	0.98155	0.98173	0.98189	0.98204	0.98218
2.3	0.98238	0.98281	0.98319	0.98352	0.98383	0.98410	0.98435	0.98457	0.98478	0.98496	0.98514	0.98530	0.98544	0.98558	0.98571
2.4	0.98554	0.98594	0.98629	0.98660	0.98688	0.98713	0.98735	0.98756	0.98775	0.98792	0.98807	0.98822	0.98836	0.98848	0.98860
2.5	0.98816	0.98853	0.98885	0.98913	0.98938	0.98961	0.98982	0.99000	0.99017	0.99033	0.99047	0.99060	0.99072	0.99084	0.99094
2.6	0.99033	0.99066	0.99095	0.99121	0.99144	0.99164	0.99183	0.99200	0.99215	0.99229	0.99242	0.99253	0.99264	0.99274	0.99284
2.7	0.99211	0.99241	0.99267	0.99291	0.99311	0.99330	0.99346	0.99361	0.99375	0.99387	0.99398	0.99409	0.99419	0.99427	0.99436
2.8	0.99358	0.99385	0.99408	0.99429	0.99447	0.99464	0.99478	0.99491	0.99504	0.99515	0.99525	0.99534	0.99542	0.99550	0.99557
2.9	0.99478	0.99502	0.99523	0.99541	0.99557	0.99572	0.99585	0.99596	0.99607	0.99617	0.99625	0.99633	0.99641	0.99648	0.99654
3.0	0.99576	0.99597	0.99616	0.99632	0.99646	0.99659	0.99670	0.99680	0.99690	0.99698	0.99706	0.99713	0.99719	0.99725	0.99731
3.1	0.99656	0.99675	0.99691	0.99705	0.99718	0.99729	0.99739	0.99748	0.99756	0.99763	0.99769	0.99775	0.99781	0.99786	0.99791
3.2	0.99721	0.99738	0.99752	0.99764	0.99775	0.99785	0.99793	0.99801	0.99808	0.99814	0.99820	0.99825	0.99830	0.99834	0.99838
3.3	0.99774	0.99788	0.99801	0.99812	0.99821	0.99830	0.99837	0.99843	0.99849	0.99855	0.99860	0.99864	0.99868	0.99872	0.99875
3.4	0.99817	0.99830	0.99840	0.99850	0.99858	0.99865	0.99871	0.99877	0.99882	0.99887	0.99891	0.99894	0.99898	0.99901	0.99904
3.5	0.99852	0.99863	0.99872	0.99880	0.99887	0.99893	0.99899	0.99904	0.99908	0.99912	0.99915	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926
3.6	0.99880	0.99890	0.99898	0.99905	0.99911	0.99916	0.99920	0.99924	0.99928	0.99931	0.99934	0.99937	0.99939	0.99941	0.99943
3.7	0.99903	0.99911	0.99918	0.99924	0.99929	0.99934	0.99937	0.99941	0.99944	0.99947	0.99949	0.99951	0.99953	0.99955	0.99957
3.8	0.99921	0.99928	0.99934	0.99940	0.99944	0.99948	0.99951	0.99954	0.99956	0.99959	0.99961	0.99963	0.99964	0.99966	0.99967
3.9	0.99936	0.99942	0.99948	0.99952	0.99956	0.99959	0.99962	0.99964	0.99966	0.99968	0.99970	0.99971	0.99973	0.99974	0.99975
4.0	0.99948	0.99954	0.99958	0.99962	0.99965	0.99968	0.99970	0.99972	0.99974	0.99975	0.99977	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981