MAT162 第6讲：圆

目录

1 圆的定义 **2**

1.1 圆的方程 2

1.2 圆盘 3

1.3 移动圆心 4

2 圆的周长 **5**

2.1 圆周长与π 6

2.2 角度 7

2.3 用角度表示弧长 8

2.4 弧度 9

3 圆的面积 **10**

3.1 面积的推导 10

3.2 圆的一部分的面积 11

4 球面 **12**

4.1 2-球面 12

4.2 在球面上定位 14

4.3 纬度和经度 14

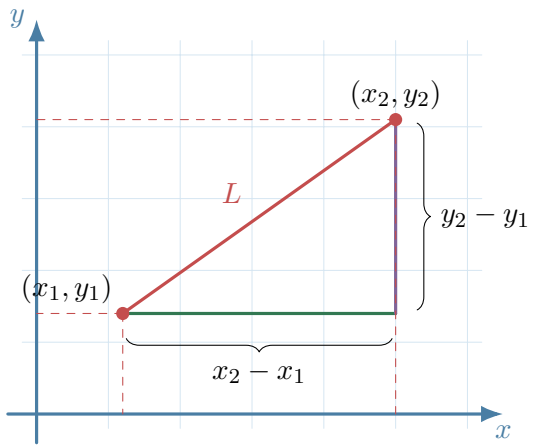
在本讲中，我们将结束关于直线的讨论，并进入一个新的主题：圆。今天我们先从基础开始，即圆的定义及其几何性质。在这个过程中，我们还将介绍π、弧度、圆弧和扇形。在本讲的最后部分，我们会把这些几何思想推广到三维空间，并简要介绍2-球面。

1 圆的定义

假设二维欧几里得空间$\mathbb{R}^2$ 中有两个点p_1 和p_2。由于$\mathbb{R}^2$ 中的点需要用两个数来描述，我们可以写成

$$p_1 = (x_1, y_1) \quad \text{以及} \quad p_2 = (x_2, y_2).$$

在第2讲中，我们看到，把这两个点画在平面上会形成一个直角三角形，其中水平方向和垂直方向的变化如下图所示：



根据勾股定理，未知的距离L 可以通过取正平方根得到：

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

现在，假设我们想找出距离原点恰好为L 的所有点。根据前面的代数公式，我们令第一个点$p_1 = (x_1, y_1)$ 等于$(0, 0)$。为了方便，把第二个点写成$p_2 = (x, y)$。通过直接代入，距离公式化为：

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \xrightarrow{\text{化简}} \quad L = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

将两边平方后可知，当点(x, y) 满足以下方程时，它到原点的距离就是L：

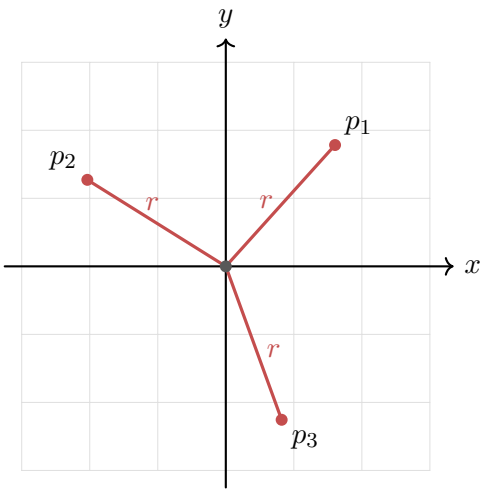
$$L^2 = x^2 + y^2.$$

1.1 圆的方程

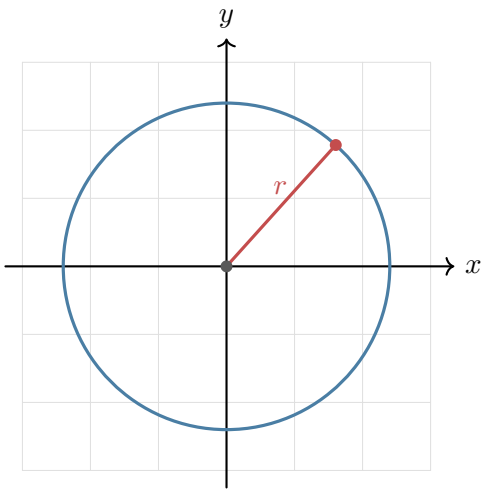
圆有一个特殊性质：圆上的每一个点到圆心的距离都相同。在讨论圆时，我们把圆周到圆心之间的这个距离称为半径。假设我们固定这个距离，并把它记作r。根据刚才推导出的方程，有许多点$p = (x, y)$ 满足

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

圆就定义为所有这样的点的集合：



距离原点为r 的三个点p_1, p_2, p_3。



半径为r 的圆。

以原点为圆心、半径为r 的圆

以原点为圆心、半径为r 的圆，是所有满足下列方程的点(x, y) 的集合：

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

1.2 圆盘

假设我们有一个半径为r 的圆，并考虑$\mathbb{R}^2$ 中的一个点$p = (x, y)$。根据坐标x 和y 的取值，点p 只可能出现以下三种情况：

1. 点p 恰好在圆上；
2. 点p 在圆的内部；
3. 点p 在圆的外部。

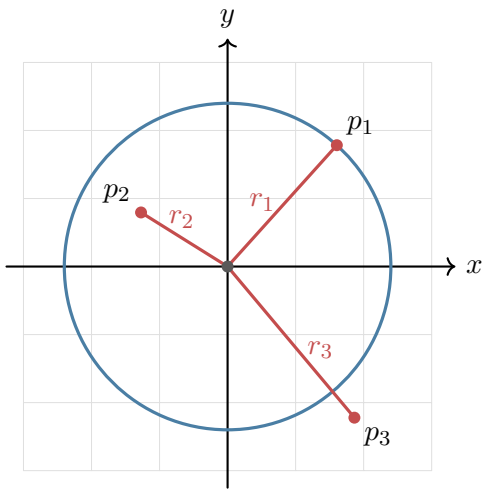
在上一节中我们看到，当$x^2 + y^2 = r^2$ 时，也就是说，当p 与$(0, 0)$ 之间的距离恰好为r 时，点p 位于圆上。当点p 比圆周更靠近原点时，它位于圆的内部；也就是说，p 与$(0, 0)$ 之间的距离小于r。类似地，当点p 比圆周距离原点更远时，它位于圆的外部。这三种情况可以用代数形式总结如下。

以原点为圆心的圆

设$p = (x, y)$ 是$\mathbb{R}^2$ 中的一点，C 是以原点为圆心、半径为r 的圆。

1. 如果p 在C 上，则$x^2 + y^2 = r^2$
2. 如果p 在C 内部，则$x^2 + y^2 < r^2$
3. 如果p 在C 外部，则$x^2 + y^2 > r^2$

下图展示了这三种情况：



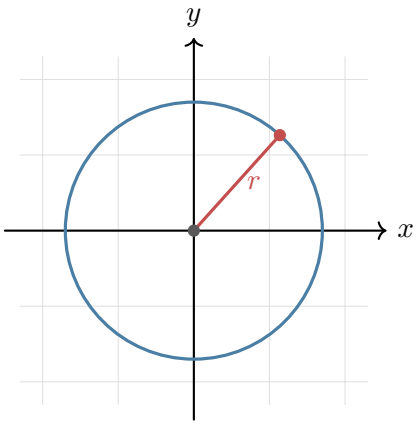
利用这个观察，我们还可以考虑圆内部所包含的所有点组成的区域。这个区域称为圆盘，可以用下面的不等式来描述。

以原点为中心、半径为r 的闭圆盘

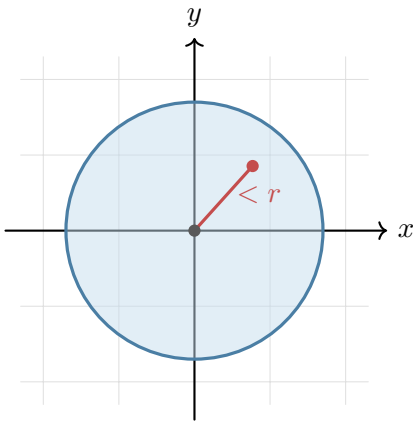
以原点为中心、半径为r 的（闭）圆盘，是所有满足下列不等式的点(x, y) 的集合：

$$x^2 + y^2 \leq r^2.$$

简单来说，闭圆盘包括圆内部的所有点，也包括圆周本身。与圆不同，圆盘是一个二维区域，而不是一条一维曲线：



半径为r 的圆：$x^2 + y^2 = r^2$



半径为r 的圆盘：$x^2 + y^2 \leq r^2$

我们可以把圆看作圆盘的边界，而圆盘则是圆内部整个填充起来的区域。

1.3 移动圆心

到目前为止，我们一直假设圆心位于原点$(0, 0)$。我们也可以通过寻找距离某一点(a, b) 固定距离的所有点，来定义以其他点为圆心的圆。根据距离公式，可以考虑

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

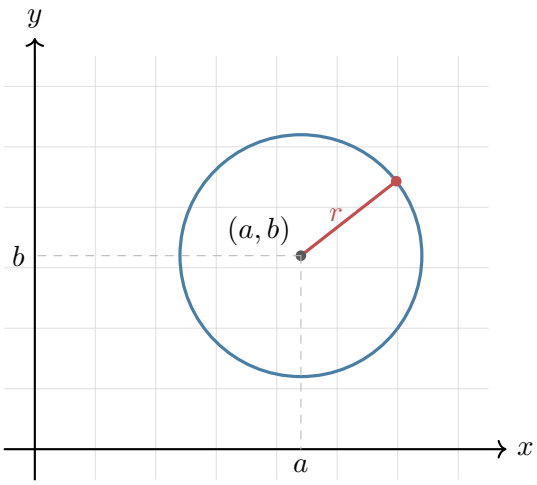
并要求这个距离等于r，从而得到下面的定义。

以某一点为圆心的圆

以点$p=(a,b)$ 为圆心、半径为r 的圆，定义为所有满足下列方程的点(x,y) 的集合：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

从几何上看，我们可以把以原点为圆心、半径为r 的圆移动到$\mathbb{R}^2$ 中的一个新位置：



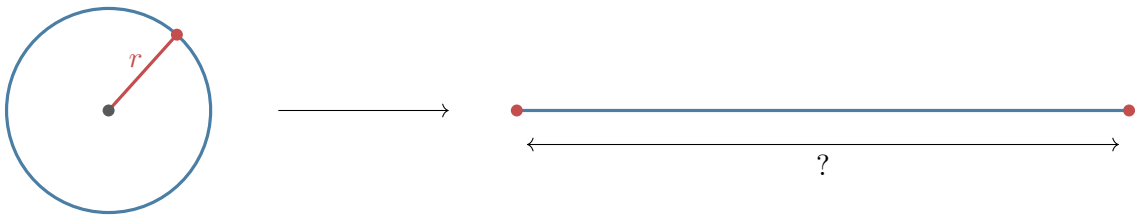
特别地，点(a,b) 表示把圆在水平方向移动a 个单位，在竖直方向移动b 个单位。同样的思想也适用于以(a,b) 为中心的圆盘。

2 圆的周长

现在我们来研究圆的一些基本几何性质。在$\mathbb{R}^2$ 中移动一个圆不会改变它的大小，因此为了简化讨论，我们假设所有圆都以原点为圆心。首先，我们来回答下面的问题：

一个圆有多长?

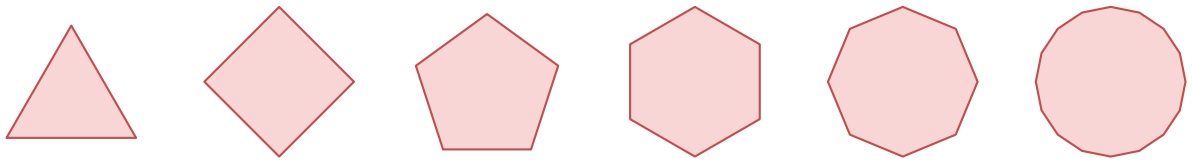
换句话说，如果把圆剪开并拉直，那么得到的线段有多长?



圆的长度，也就是类似于多边形周长的量，称为圆的周长。

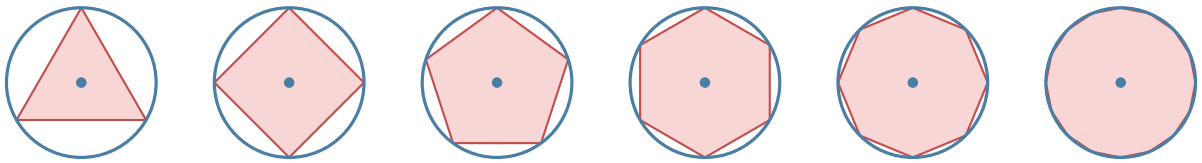
2.1 圆周长与π

有很多种方法可以推导圆的周长。我们先注意下面这个现象：



$n=3$ $n=4$ $n=5$ $n=6$ $n=8$ $n=16$

可以看到，正多边形的边数越多，它看起来就越像一个圆。因此原则上，我们可以通过计算圆内接的各种多边形的周长来近似圆的周长：



$n=3$ $n=4$ $n=5$ $n=6$ $n=8$ $n=16$

如果不断增加多边形的边数，那么得到的周长应该会越来越接近圆的周长。为了方便，我们假设$r=\frac{1}{2}$，也就是说圆的直径恰好为1。计算不同边数的正多边形的周长后，我们得到：

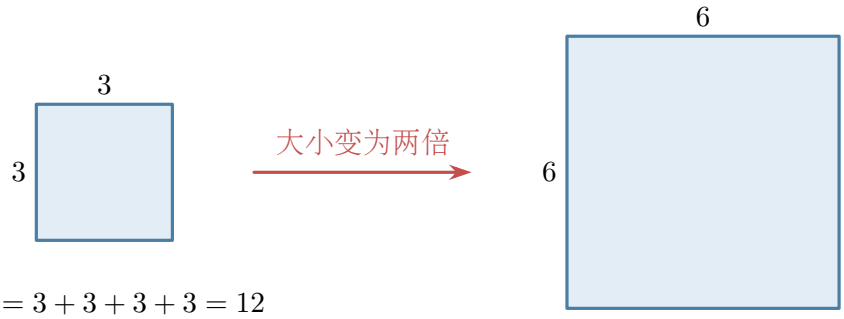
边数	周长
3	2.59808
4	2.82843
5	2.93893
6	3.00000
7	3.03719
8	3.06147
16	3.12145
32	3.13655
64	3.14033
128	3.14128
⋮	⋮

如果继续这样做，就会发现这个数列最终趋近于某一个特定的数。有趣的是，这个数的小数部分会无限延续。下面写出了小数点后的前50 位：

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots$$

事实上，这个数在圆的理论中出现得非常频繁，因此我们给它一个专门的符号：π。

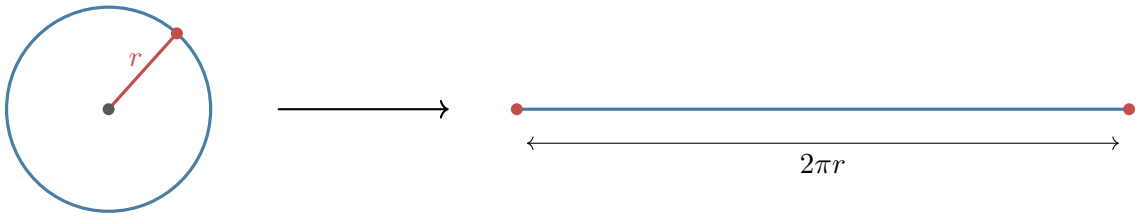
一般来说，如果一个图形被等比例放大，那么它的周长也会按相同的比例放大。例如，如果一个正方形的边长为3，然后把它放大到原来的两倍，那么每一条边都会乘以2，因此总周长也会乘以2：



周长$= 3 + 3 + 3 + 3 = 12$

周长$= 6 + 6 + 6 + 6$
$= 2(3 + 3 + 3 + 3) = 24$

同样的思想也适用于圆的周长：如果把直径d 乘以某个数，那么圆的周长也会乘以同样的数。因此，我们的问题可以得到下面的答案：



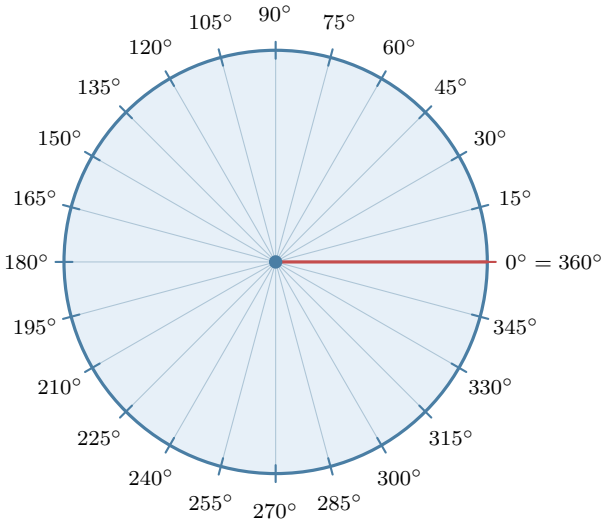
圆的周长

如果圆的直径为d，那么它的周长为：

$$C = \pi d = 2\pi r$$

2.2 角度

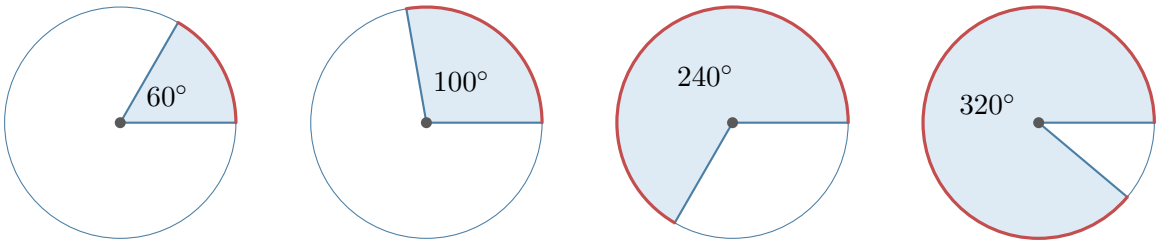
度数用于测量圆周上的角度。按照惯例，我们从正x 轴开始计数，并沿逆时针方向移动。下面列出了一些常见的角度：



一个自然的问题是：为什么一整圈是360 度，而不是例如100 度或者1000 度？实际上，使用360 的约定在历史上与古巴比伦数学有关。古巴比伦人使用的是以60 为底的计数系统，而不是我们熟悉的十进制。虽然这看起来很奇怪，但它有很实际的优点：60 有很多因数，因此很容易把它平均分成$2, 3, 4, 5$ 或6 份。对于完整的一圈，则恰好有$360 = 60 \times 6$。

2.3 用角度表示弧长

我们知道，360° 表示完整的一圈。如果取小于360° 的角度，就可以考虑圆周的一部分。例如：



这些角度在圆周上截出一部分，这一部分称为圆弧，在上图中用红色表示。利用完整圆的周长为$2\pi r$ 这一事实，我们可以通过计算角度θ 占完整360 度的多少来求出这些圆弧的长度。

例如，60 度是360 度的$\frac{1}{6}$，因此与60 度对应的弧长就是整个圆周长度的$\frac{1}{6}$，即$\frac{1}{6} \cdot 2\pi r$。一般来说，弧长公式如下：

半径为r 的圆上的弧长

如果角度θ 用度数表示，则

$$\text{弧长} = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r.$$

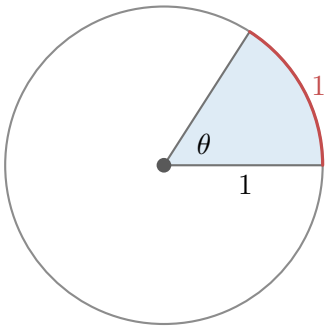
简单来说，弧长公式就是把圆的总周长按比例取出其中的一部分。对于上面的例子，利用弧长公式可以得到：

- 当$\theta = 100°$ 时，弧长为$\frac{100}{360} \cdot 2\pi r = \frac{5}{9}\pi r$；
- 当$\theta = 240°$ 时，弧长为$\frac{240}{360} \cdot 2\pi r = \frac{4}{3}\pi r$；
- 当$\theta = 320°$ 时，弧长为$\frac{320}{360} \cdot 2\pi r = \frac{16}{9}\pi r$。

2.4 弧度

使用度数时，我们根据一个方便的历史约定把圆分成360 份。现在我们介绍另一种测量角度的方法，这种方法直接建立在圆本身的几何性质之上。

首先考虑单位圆。我们知道它的周长为2π，大约等于6.28。反过来看，单位圆半圈对应的弧长就是2π 的一半，也就是π。那么，在圆周上的某个位置，一定存在一个角度θ，使得它所对应的弧长恰好等于1：



通过对弧长公式进行简单的代数运算，我们可以求出这个角度θ：

$$1 = \frac{\theta}{360} \times 2\pi = \frac{\theta}{180}\pi \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \frac{180}{\pi},$$

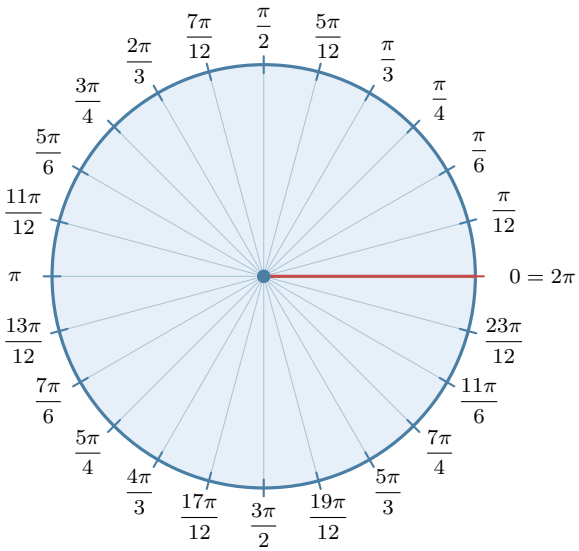
因此大约有$\theta \approx 57.3$ 度。这个特殊的角度θ 被称为一个弧度。一般来说，它可以描述如下。

角度与弧度

对于半径为r 的圆，如果一个角所对应的弧长恰好等于r，那么这个角就是一个弧度。度数转换为弧度的公式为：

$$\text{弧度} = \frac{\pi}{180} \times \text{角度}.$$

利用这个转换公式，我们可以看出，一整圈包含2π 弧度。这把完整的一次旋转与旋转过程中得到的弧长直接联系起来。上一节中的图也可以用弧度表示如下：



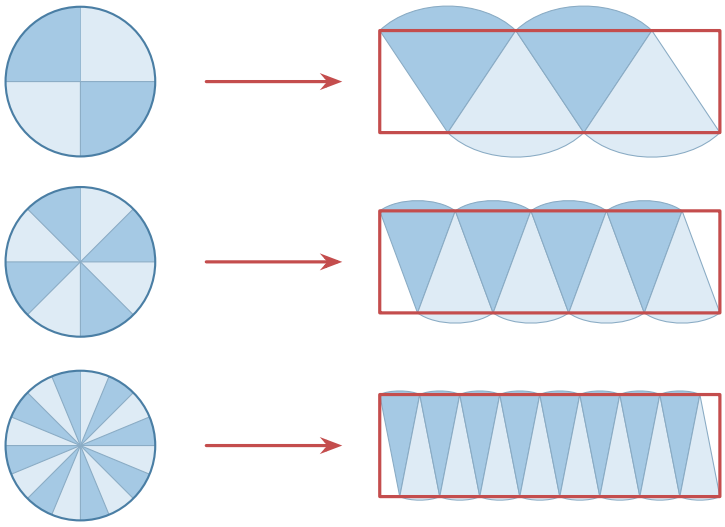
3 圆的面积

接下来，我们研究圆的另一个基本量：面积。这里存在一点语言上的含糊之处，因为“面积”严格来说是二维图形所具有的性质。因此，从严格意义上说，当我们说“这个圆的面积等于7”时，我们真正的意思是“这个圆所围成的圆盘的面积等于7”。在理解了这一点之后，我们下面会直接使用通常的说法，即“圆的面积”。

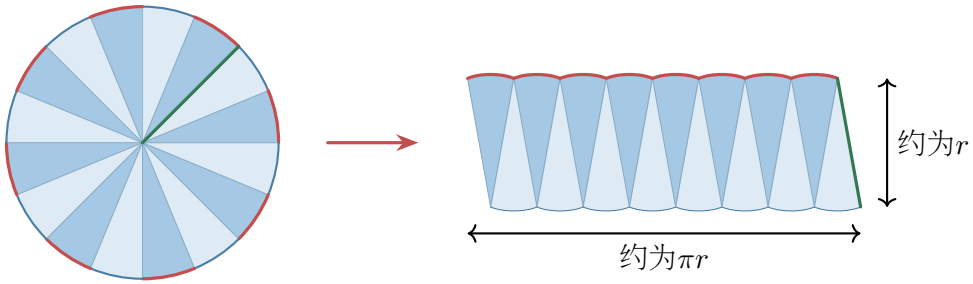
3.1 面积的推导

求圆面积的方法同样有很多种。或许最直接的方法，是使用与求圆周长类似的思路：在圆内画出边数越来越多的多边形，然后计算这些多边形各自的面积。这些面积应该会逐渐趋近圆的面积，就像多边形的周长逐渐趋近圆周长一样。

不过，我们这里采用另一种方法。为了方便说明，假设圆的半径为r。我们的关键观察如下：



用语言来描述：当我们把圆分成多个大小相等的扇形时，把这些扇形重新排列后，单个扇形越细，整体形状就越接近一个长方形。粗略地说，这些小的“切片”会越来越平，看起来越来越像三角形。如果不断把它们分得更细，那么重新排列后的扇形最终会越来越接近一个完美的长方形：



许多细小的扇形

这个长方形的高度会趋近于半径r，如上图中的绿色线段所示。所有红色圆弧加起来正好构成圆周的一半。由于圆的总周长是$2\pi r$，因此一半就是πr。利用长方形面积的标准公式，我们得到熟悉的公式：

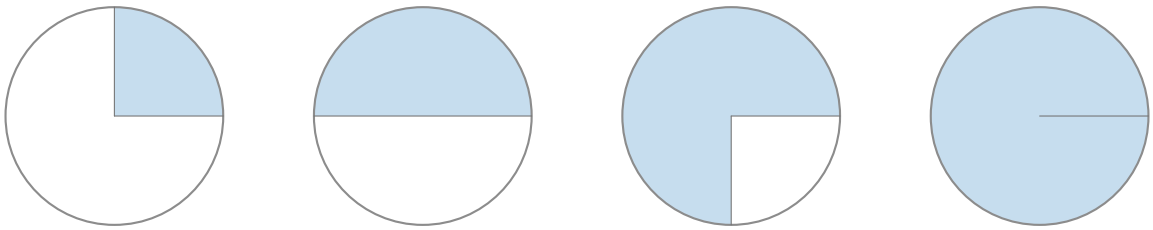
圆的面积

半径为r 的圆所围成的面积为：

$$A = \pi r^2.$$

3.2 圆的一部分的面积

现在假设我们有一些由不同的θ 值决定的扇形，其中θ 用弧度表示。与第2.3节的思想类似，我们可以通过比较θ 与完整圆周角2π 的比例来计算这些较小扇形的面积。考虑下图：



$\theta = \dfrac{\pi}{2}$
$A = \dfrac{\pi r^2}{4}$

$\theta = \pi$
$A = \dfrac{\pi r^2}{2}$

$\theta = \dfrac{3\pi}{2}$
$A = \dfrac{3\pi r^2}{4}$

$\theta = 2\pi$
$A = \pi r^2$

这里的一般规律是求出θ 与2π 的比值。把这个比值乘以整个圆的面积，就得到较小扇形的面积。

扇形的面积

对于半径为r、角度为θ 的扇形，如果θ 用弧度表示，则

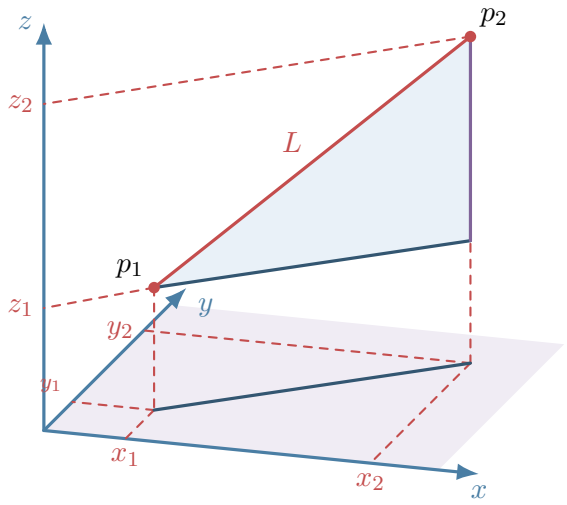
$$A = \frac{\theta r^2}{2}.$$

4 球面

圆的定义完全来自$\mathbb{R}^2$ 中距离的概念。简单来说，我们把圆定义为与原点保持固定距离的所有点的集合。回忆第2讲，如果改为在三维空间中工作，那么两个点p_1 和p_2 需要用三个数来描述：

$$p_1 = (x_1, y_1, z_1), \qquad \text{以及} \qquad p_2 = (x_2, y_2, z_2).$$

两点之间的距离就是三维空间中连接它们的线段长度：



正如我们在第2讲中看到的，对勾股定理应用两次，就可以求出距离L：

$$\text{距离}(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

4.1 2-球面

圆被定义为二维空间中所有距离原点固定距离r 的点的集合。我们可以直接推广这个定义：在三维空间中，把所有距离原点固定距离的点组成的集合看作一种“高维的圆”。从代数上说，这些点应当满足：

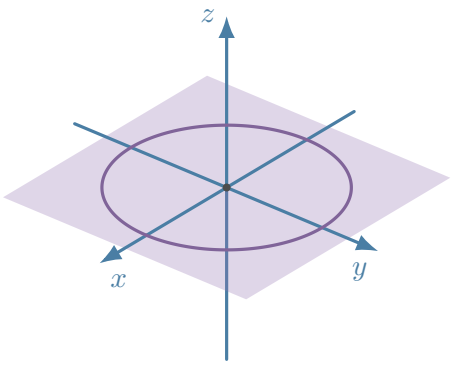
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

这个方程与普通圆的定义方程非常相似。

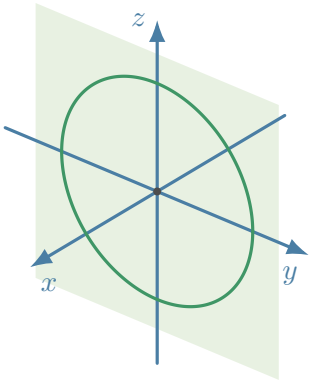
从几何上看，这个空间是什么样子的呢？我们可以先考察$\mathbb{R}^3$ 中三个最常见的二维截面：xy 平面、yz 平面和xz 平面。在每一个平面中，我们有意把x, y, z 中的一个设为零，从而实际上忽略一个维度。例如，xy 平面由方程$z = 0$ 定义。如果把$z = 0$ 代入上面的公式，就会重新得到半径为r 的圆：

$$x^2 + y^2 + 0^2 = r^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

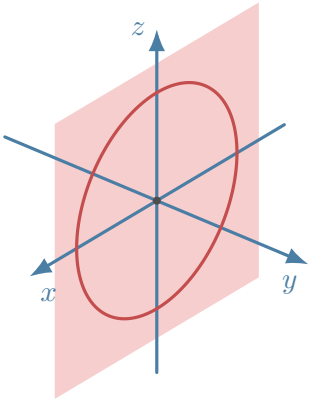
从几何上说，这意味着球面在xy 平面上的截面是一个半径为r 的圆。事实上，在这三个平面中都会出现同样的情况：



xy 平面内半径为r 的圆

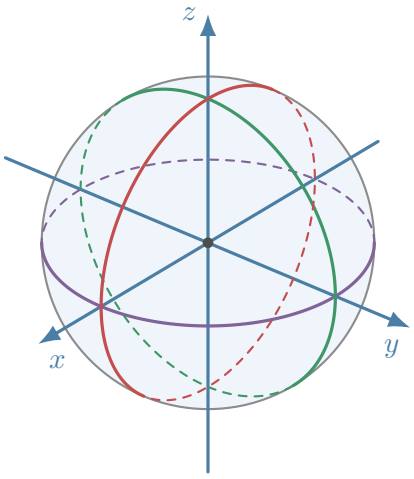


yz 平面内半径为r 的圆



xz 平面内半径为r 的圆

上面的图只是整个二维图形的“一维截面”。一般来说，我们还必须包括所有其他满足方程的点。最终得到：



这个空间称为2-球面，更常见的叫法就是球面。

2-球面

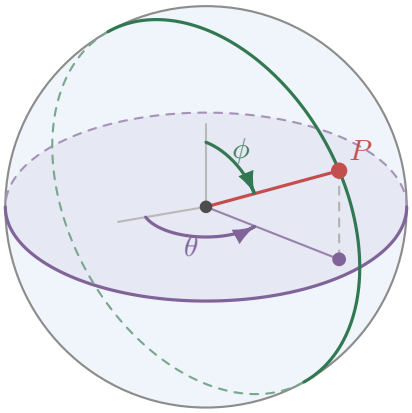
以原点为中心、半径为r 的球面，由所有满足

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

的点(x, y, z) 组成。

4.2 在球面上定位

圆是一个一维对象，这意味着我们只需要一个数就能确定圆上的位置——事实上，这个数就是θ。相比之下，球面是一个二维对象，因此我们需要两个数来描述球面上的点。实现这一点的方法有很多，我们这里只简单介绍其中一种。考虑下图：



这里我们考虑球面上的两个圆：一个位于赤道上，另一个穿过北极。我们可以想象这样确定一个点的位置：首先从北极向下移动一个角度ϕ，然后绕球面旋转一个角度θ。为了完整起见，这两个角度有专门的名称：

- 角度ϕ 称为极角，因为它表示一个点从北极方向向下旋转了多少。
- 角度θ 称为方位角；这个术语来源于阿拉伯天文学。

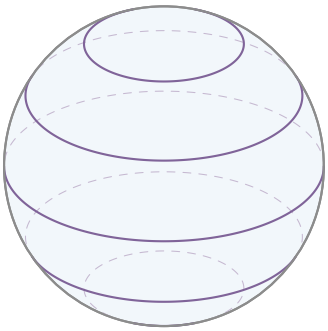
这样，我们就可以用两个数(θ, ϕ) 来描述半径为r 的2-球面上的一个点。角度θ 告诉我们绕球面旋转了多少，而ϕ 告诉我们从北极向下移动了多少。

4.3 纬度和经度

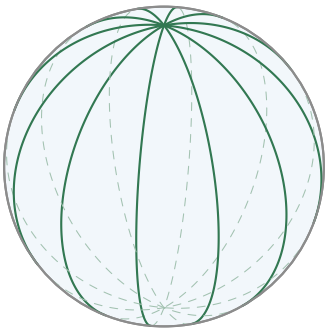
粗略地说，地球可以用一个球面来建模。我们在地图上熟悉的纬线和经线，对应于球面上的曲线：

- 纬线固定ϕ 的值，让θ 自由变化，因此形成位于不同高度的水平圆；
- 经线固定θ 的值，让ϕ 自由变化，因此形成从一个极点到另一个极点的半圆。

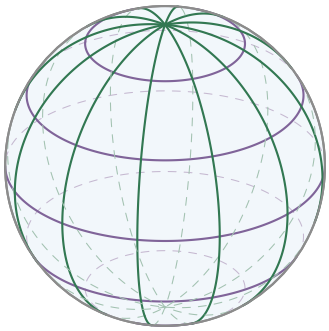
下图画出了通过北极和南极的完整圆。它们共同在球面上形成了一套弯曲的坐标网格：



纬线



经线



纬线和经线组成的网格