MAT162 第6回講義：円

目次

1 円の定義 **2**

1.1 円の方程式 2

1.2 円板 3

1.3 中心を移動する 5

2 円周 **6**

2.1 円周とπ 6

2.2 度 8

2.3 度数法での弧の長さ 8

2.4 ラジアン 9

3 円の面積 **10**

3.1 面積の導出 10

3.2 円の一部分の面積 12

4 球面 **12**

4.1 2-球面 13

4.2 球面上を移動する 14

4.3 緯度と経度 15

この講義では、直線についての議論から離れ、新しいトピックである円について学びます。今日はまず、円の定義とその幾何学的な性質という基本事項から始めます。その過程で、π、ラジアン、弧、扇形についても導入します。講義の最後では、同じ幾何学的な考え方を3次元に拡張し、2-球面について簡単に説明します。

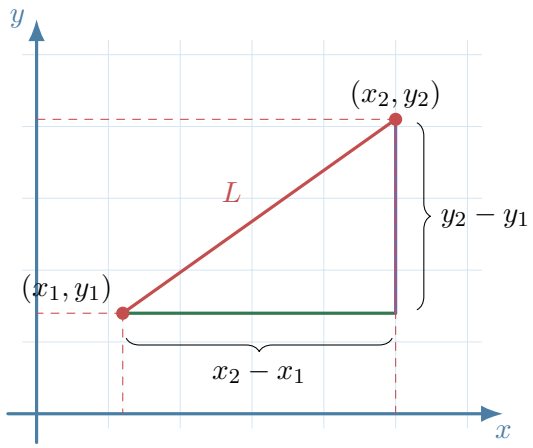
1　円の定義

2次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^2$ に2つの点p_1 とp_2 があるとします。$\mathbb{R}^2$ の点を表すには2つの数が必要なので、

$$p_1 = (x_1, y_1) \quad \text{および} \quad p_2 = (x_2, y_2)$$

と書くことができます。

第2回講義では、この2点を平面上に描くと直角三角形ができ、その水平方向と垂直方向の変化が次のように表されることを学びました。



ピタゴラスの定理より、未知の距離L は正の平方根を取ることで

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

と求められます。

次に、原点からちょうど距離L にあるすべての点を考えてみましょう。先ほどの式において、最初の点$p_1 = (x_1, y_1)$ を$(0, 0)$ とします。簡単のため、2つ目の点を$p_2 = (x, y)$ と書くと、単純に代入することで距離の公式は次のようになります。

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \xrightarrow{\text{簡単にすると}} \quad L = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

両辺を2乗すると、点(x, y) が原点から距離L にあるための条件は、次の方程式を満たすことだと分かります。

$$L^2 = x^2 + y^2.$$

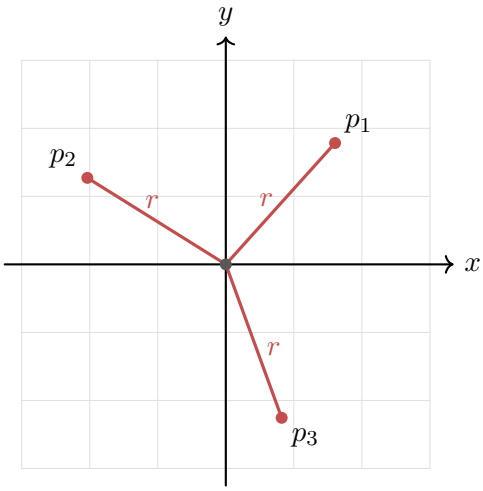
1.1　円の方程式

円には、円周上のすべての点が中心から同じ距離にあるという特別な性質があります。円について考えるとき、円周と中心との間のこの距離を半径と呼びます。この距離を固定し、それをr としましょう。先ほど導いた方程式によれば、

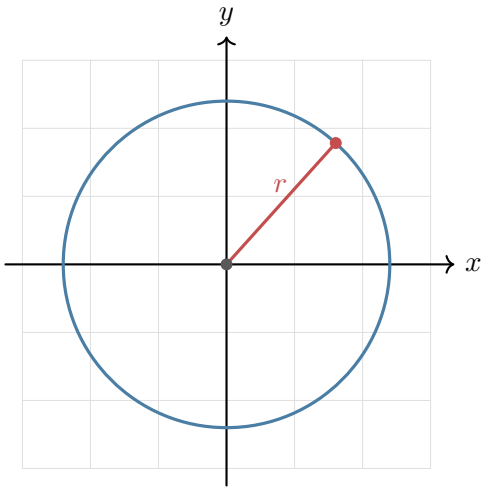
$$r^2 = x^2 + y^2$$

を満たす点$p = (x, y)$ は多数存在します。

円とは、そのようなすべての点の集合として定義されます。



原点から距離r にある3つの点p_1, p_2, p_3。



半径r の円。

原点を中心とする半径r の円

原点を中心とする半径r の円とは、次の方程式を満たすすべての点(x, y) の集合です。

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

1.2 円板

半径r の円があり、$\mathbb{R}^2$ 内の点$p = (x, y)$ を考えるとします。座標x とy の値によって、p について起こり得ることは次の3つだけです。

1. 点p がちょうど円周上にある。
2. 点p が円の内側にある。
3. 点p が円の外側にある。

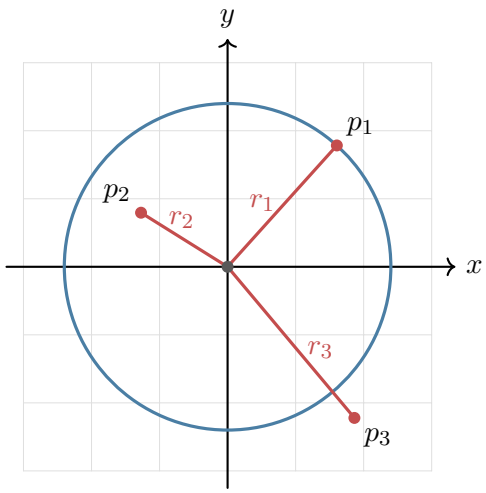
前節で見たように、$x^2 + y^2 = r^2$ のとき、つまりp と$(0, 0)$ の距離がちょうどr のとき、点p は円周上にあります。点p が円の内側にあるのは、その点が円周よりも原点に近いときです。つまり、p と$(0, 0)$ の距離がr より小さいときです。同様に、点p が円の外側にあるのは、その点が円周よりも原点から遠いときです。この3つの場合は、代数的には次のようにまとめられます。

原点を中心とする円

$p = (x, y)$ を$\mathbb{R}^2$ の点、C を原点を中心とする半径r の円とします。

1. p がC 上にあるならば$x^2 + y^2 = r^2$
2. p がC の内側にあるならば$x^2 + y^2 < r^2$
3. p がC の外側にあるならば$x^2 + y^2 > r^2$

下の図では、この3つの場合を示しています。



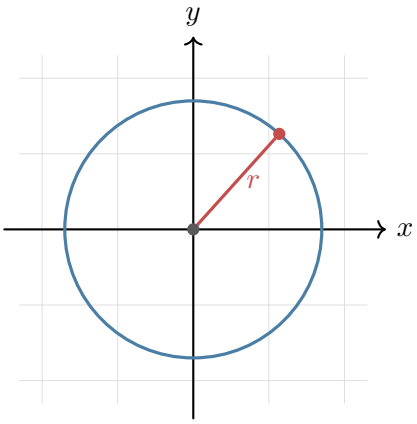
この観察を使うと、円の内部に含まれるすべての点からなる領域も考えることができます。これは円板と呼ばれ、代数的には次のように表されます。

原点を中心とする半径r の閉円板

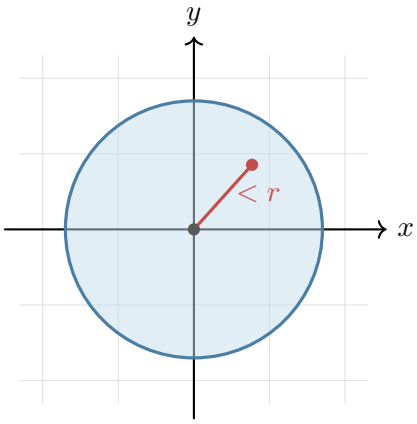
原点を中心とする半径r の（閉）円板とは、次の不等式を満たすすべての点(x, y) の集合です。

$$x^2 + y^2 \leq r^2.$$

簡単に言えば、閉円板には円の内側にあるすべての点と、円周そのものが含まれます。円が1次元の曲線であるのに対して、円板は2次元の領域です。



半径r の円：$x^2 + y^2 = r^2$



半径r の円板：$x^2 + y^2 \leq r^2$

円は円板の境界であり、円板はその円の内部をすべて塗りつぶした領域だと考えることができます。

1.3　中心を移動する

これまでは、円の中心を原点$(0,0)$ としてきました。しかし、ある点から一定の距離にあるすべての点を考えることで、別の点(a,b) を中心とする円も定義できます。距離の公式によれば、

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

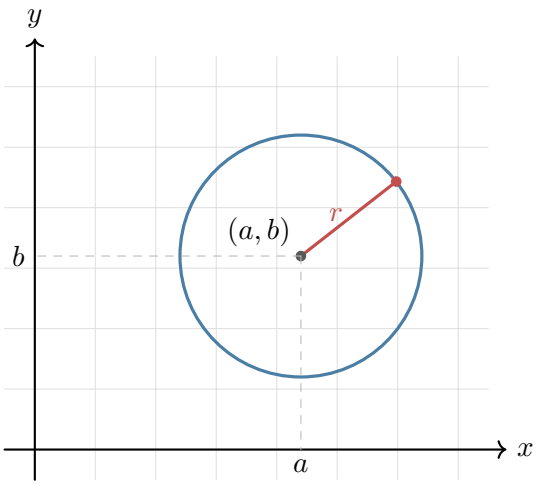
という式を考え、これがr に等しいと要求すれば、次の定義が得られます。

ある点を中心とする円

点$p = (a,b)$ を中心とする半径r の円とは、次の方程式を満たす点(x,y) の集合です。

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

幾何学的には、原点を中心とする半径r の円を、$\mathbb{R}^2$ 内の新しい位置へ移動させると考えることができます。



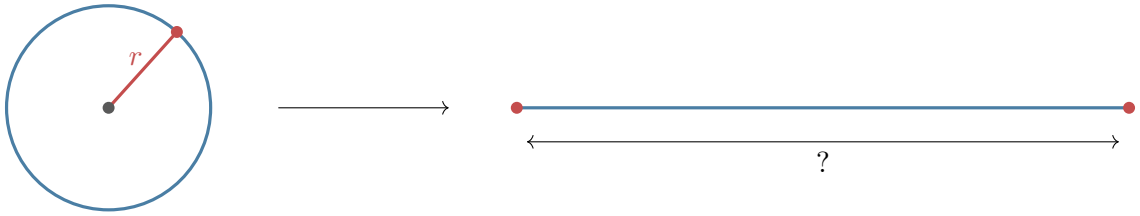
特に、点(a,b) は、円を水平方向にa 単位、垂直方向にb 単位移動することを表します。同じ考え方は、(a,b) を中心とする円板にも成り立ちます。

2　円周

ここからは、円の基本的な幾何学について少し詳しく調べます。円を$\mathbb{R}^2$ 内で移動してもその大きさは変わらないため、簡単のために、以下ではすべての円が原点を中心としていると仮定します。まず、次の問いに答えましょう。

円の長さはどれくらいでしょうか？

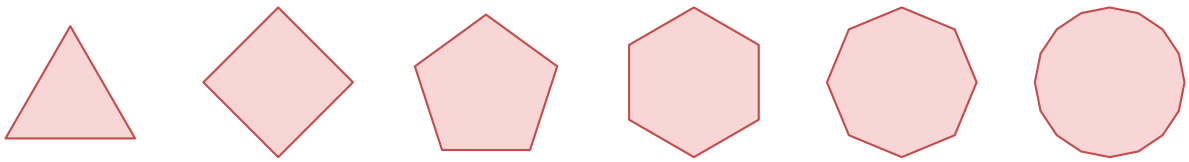
言い換えると、円を1か所で切ってまっすぐに伸ばしたとき、できる線の長さはどれくらいでしょうか。



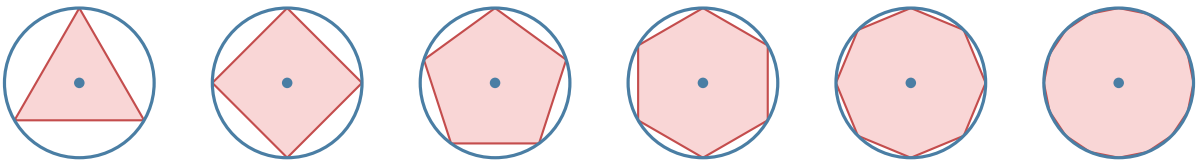
円の外周の長さ、つまり多角形でいう周の長さに対応するものを、円の円周または円周長と呼びます。

2.1　円周とπ

円周を求める方法はいくつもあります。ここではまず、次のことに注目します。



見て分かるように、正多角形の辺の数を増やしていくと、その形は次第に円に近づいていきます。したがって原理的には、円の内側に置かれたさまざまな多角形の周の長さを計算することで、円周を近似することができます。



辺の数をさらに増やした多角形について同じことを続ければ、円周の近似はどんどん良くなるはずです。計算を簡単にするため、$r = \frac{1}{2}$ と仮定しましょう。つまり、円の直径がちょうど1であるとします。辺の数が異なる正多角形について周の長さを計算すると、次のようになります。

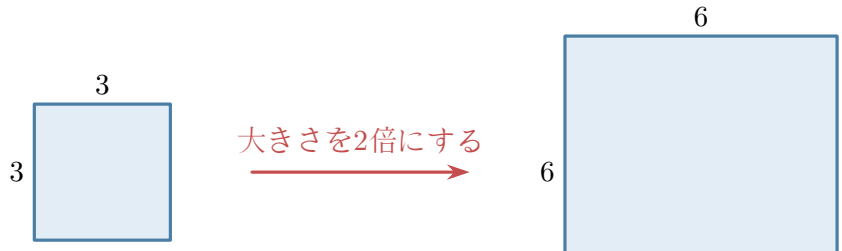
辺の数	周の長さ
3	2.59808
4	2.82843
5	2.93893
6	3.00000
7	3.03719
8	3.06147
16	3.12145
32	3.13655
64	3.14033
128	3.14128
⋮	⋮

これをさらに続けていくと、この数列はやがてある特定の数に近づいていくことが分かります。興味深いことに、この数は小数が無限に続く数です。小数点以下最初の50 桁は次の通りです。

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots$$

実際、この数は円の理論の中で非常に頻繁に現れるため、特別な記号π を使って表します。

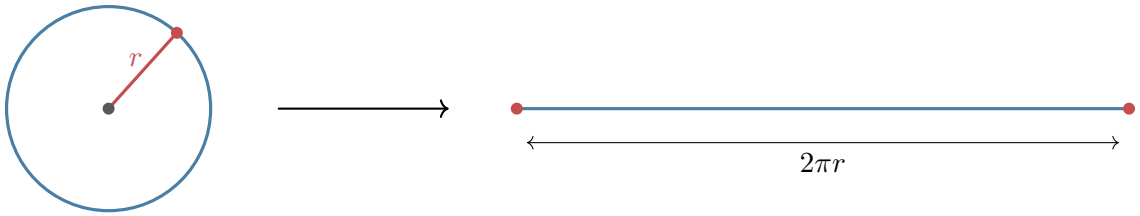
一般に、図形を一様に拡大すると、その周の長さも同じ倍率で大きくなります。例えば、一辺の長さが3 の正方形を2倍の大きさにすると、各辺も同じ倍率で長くなるため、周の長さ全体も2倍になります。



周の長さ$= 3 + 3 + 3 + 3 = 12$

周の長さ $= 6 + 6 + 6 + 6$
$= 2(3 + 3 + 3 + 3) = 24$

同じ考え方は円周にも当てはまります。直径d をある数倍すると、円周も同じ倍率で大きくなります。したがって、先ほどの問いに対する答えは次のようになります。



円周

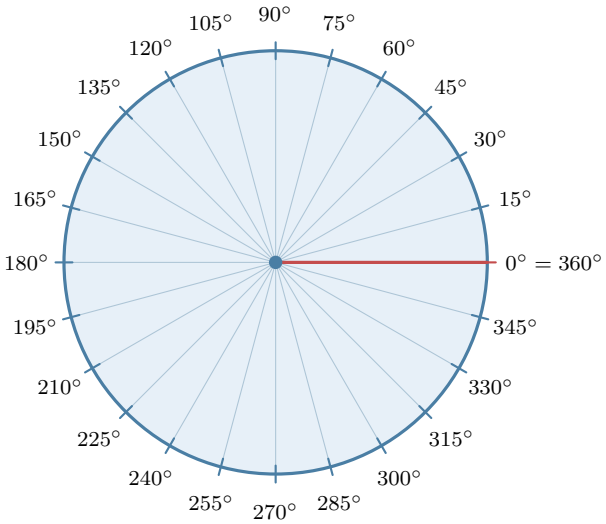
円の直径がd ならば、その円周C は

$$C = \pi d = 2\pi r$$

で与えられます。

2.2 度

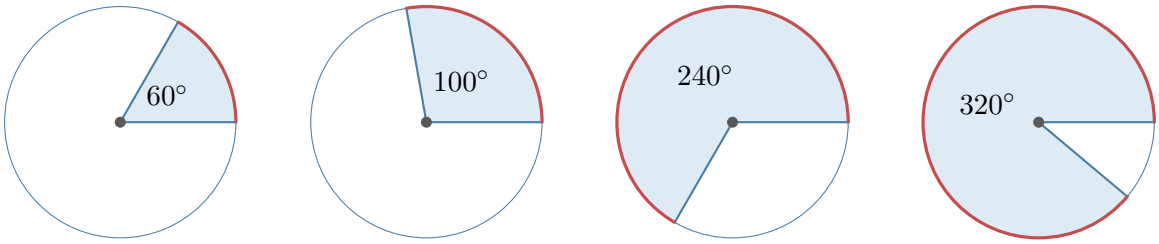
度は、円のまわりの角度を測るために使われます。ここでは慣例として、正のx 軸から角度を数え始め、反時計回りに進むことにします。円上の代表的な角度を次に示します。



ここで、「なぜ円一周は100 度や1000 度ではなく、360 度なのか」と疑問に思うかもしれません。実は、360 という慣例は古代バビロニアの数学と歴史的に関係しています。バビロニア人は、私たちが慣れている10進法ではなく、60進法を使っていました。これは一見とても奇妙に感じられますが、便利な理由があります。60 には多くの約数があり、$2, 3, 4, 5, 6$ 個の等しい部分に簡単に分けることができるのです。そして円一周については、$360 = 60 \times 6$ となります。

2.3 度数法での弧の長さ

360° が円一周を表すことは分かっています。360 より小さい角度を取ると、円周の一部分である弧を考えることができます。例えば次のようになります。



このような角度によって切り取られる円周の一部分を弧と呼びます。上の図では赤色で示されています。円全体の円周が$2\pi r$ であることを利用すると、角度θ が360 度全体のどれだけを占めるかを考えることで、弧の長さを求めることができます。

例えば、60 度は360 度の$\frac{1}{6}$ です。したがって、60 度に対応する弧の長さは、円周の長さの$\frac{1}{6}$、つまり$\frac{1}{6} \cdot 2\pi r$ となります。一般に、弧の長さは次の公式で与えられます。

半径r の円における弧の長さ

角度θ を度で測る場合、

$$\text{弧の長さ} = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r.$$

簡単に言えば、この弧の長さの公式は、円周全体の公式から、その一部分だけを取り出したものです。上の例について弧の長さの公式を使うと、

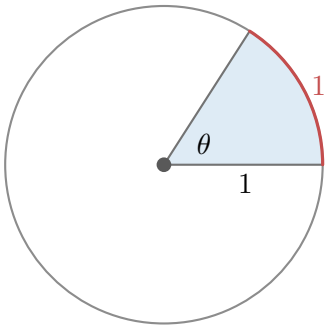
- $\theta = 100°$ の弧の長さは$\frac{100}{360} \cdot 2\pi r = \frac{5}{9}\pi r$、
- $\theta = 240°$ の弧の長さは$\frac{240}{360} \cdot 2\pi r = \frac{4}{3}\pi r$、
- $\theta = 320°$ の弧の長さは$\frac{320}{360} \cdot 2\pi r = \frac{16}{9}\pi r$

となります。

2.4　ラジアン

度数法では、歴史的に便利な慣例によって円を360 個に分けています。ここでは、円そのものの幾何学に基づいた別の角度の測り方を導入します。

まず、単位円を考えましょう。この円の円周は2π であり、およそ6.28 です。逆に考えると、単位円の半周に対応する弧の長さは2π の半分、つまりもちろんπ です。さて、円周上のどこかに、対応する弧の長さがちょうど1 になる角度θ が存在するはずです。



この角度θ の値は、弧の長さの公式に簡単な代数計算を適用することで求められます。

$$1 = \frac{\theta}{360} \times 2\pi = \frac{\theta}{180}\pi \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \frac{180}{\pi},$$

したがって、およそ$\theta \approx 57.3$ 度となります。この特別な角度θ を1ラジアンと呼び、一般には次のように定義します。

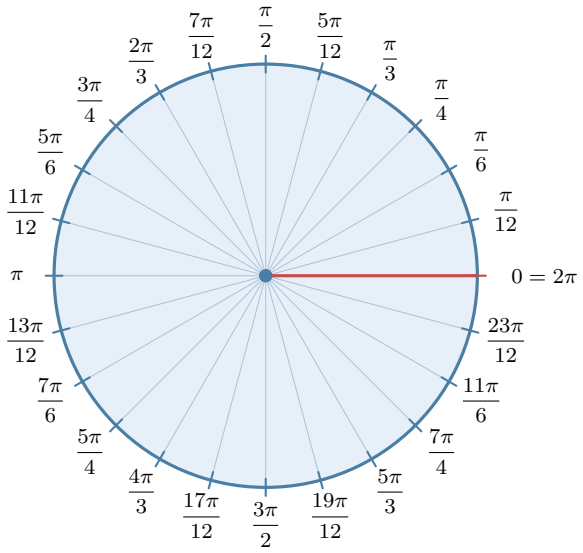
度とラジアン

半径r の円において、長さがちょうどr である弧に対応する角度を1ラジアンと呼びます。度からラジアンへの変換公式は

$$\text{ラジアン} = \frac{\pi}{180} \times \text{度}$$

です。

この変換公式を使うと、円一周には2π ラジアンが含まれることが分かります。これによって、一回転という角度と、その過程で作られる弧の長さが直接結びつきます。前節の図も、ラジアンを使って次のように書き換えることができます。



3　円の面積

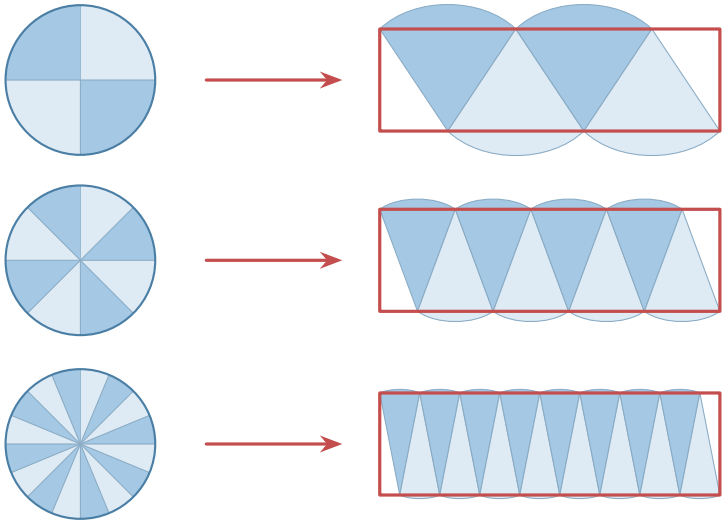
次に、円についてのもう一つの基本的な量である面積を考えます。ここには少し言葉上の曖昧さがあります。「面積」というのは、本来は2次元の図形に対して定義される量です。したがって厳密には、「この円の面積は7 である」と言うとき、実際には「この円によって囲まれた円板の面積が7 である」という意味です。この点を理解した上で、以下では普通の言い方に従って「円の面積」と呼ぶことにします。

3.1　面積の導出

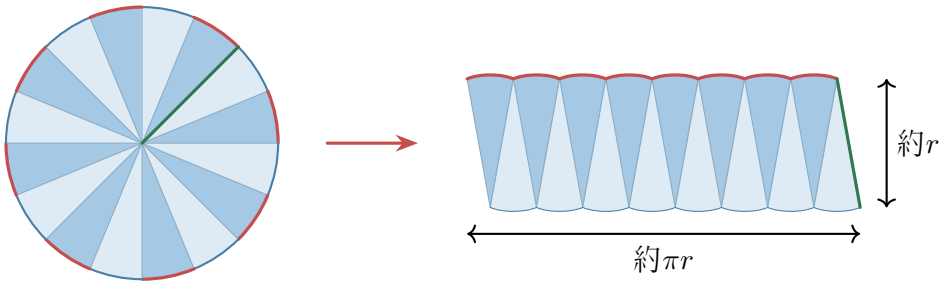
円の面積を求める方法もいくつもあります。最も直接的な方法の一つは、円周の場合と同じ議

論を使うことです。つまり、円の内側に辺の数がより多い多角形を置き、それぞれの面積を計算していきます。その値は、周の長さが円周に近づいたのと同じように、円の面積に近づくはずです。

ここでは別の方法を使います。説明を分かりやすくするため、円の半径をr とします。重要な観察は次の通りです。



言葉で説明すると、円を複数の同じ大きさの扇形に分割したとき、それらを並べ替えると、一つ一つの扇形を細かくするほど全体が長方形に近づいていくことに注目してください。大まかに言えば、この小さな円の「切片」は、細かくなるにつれて平らになり、三角形のように見えるようになります。これをさらに続けると、並べ替えた扇形は完全な長方形に近づいていきます。



多数の細い扇形

この長方形の高さは、上の緑色の線で示されているように、半径r に近づきます。また、赤色の弧をすべて合わせると、円周の半分になります。円周全体が$2\pi r$ であることは分かっているので、そのちょうど半分はπr です。長方形の面積の公式を使うと、よく知られた次の公式が得られます。

円の面積

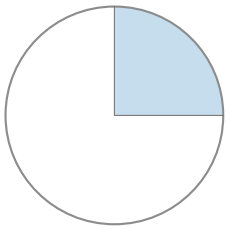
半径r の円が囲む面積は

$$A = \pi r^2$$

です。

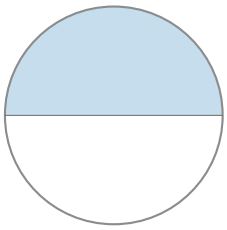
3.2　円の一部分の面積

次に、異なるθ の値によって定められる円の扇形を考えます。ここではθ はラジアンで測るものとします。第2.3節と同じ 考え方で、θ と円一周との比を求めることで、小さな扇形の面積を計算できます。次の図を考えてみましょう。



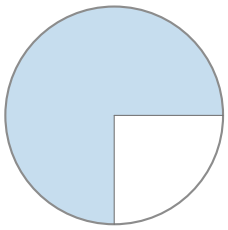
$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$A = \dfrac{\pi r^2}{4}$



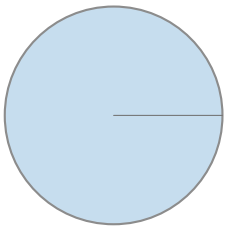
$\theta = \pi$

$A = \dfrac{\pi r^2}{2}$



$\theta = \dfrac{3\pi}{2}$

$A = \dfrac{3\pi r^2}{4}$



$\theta = 2\pi$

$A = \pi r^2$

ここでの一般的な考え方は、θ と2π の比を求めることです。この値に円全体の面積を掛ければ、小さい扇形の面積が得られます。

扇形の面積

半径r、角度θ の扇形について、θ をラジアンで測ると、

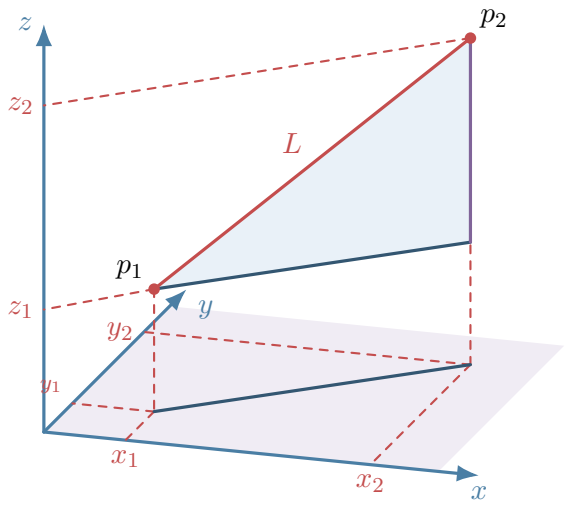
$$A = \frac{\theta r^2}{2}.$$

4　球面

円の定義は、完全に$\mathbb{R}^2$ における距離という考え方から得られました。簡単に言えば、円とは原点から一定の距離にあるすべての点の集合です。第2回講義を思い出すと、3次元で考える場合、2つの点p_1 とp_2 を表すためには3つの数が必要になります。

$$p_1 = (x_1, y_1, z_1), \qquad \text{および} \qquad p_2 = (x_2, y_2, z_2).$$

2点間の距離は、3次元空間における線分の長さによって与えられます。



第2回講義で見たように、距離L はピタゴラスの定理を2回適用することで求められ、

$$\text{距離}(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

となります。

4.1 2-球面

円は、2次元空間において原点から一定の距離r にある点の集合として定義されました。この考え方をそのまま一般化し、今度は3次元空間において原点から一定の距離にあるすべての点を「高次元の円」として考えることができます。代数的には、そのような点は次の方程式を満たすはずです。

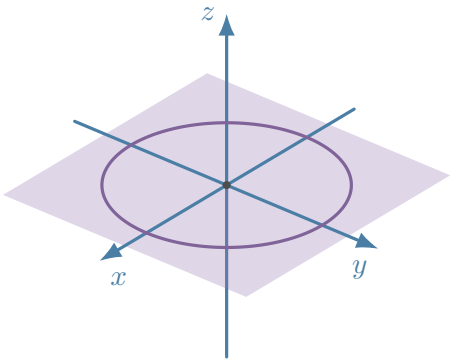
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

これは通常の円を定義する方程式と非常によく似ています。

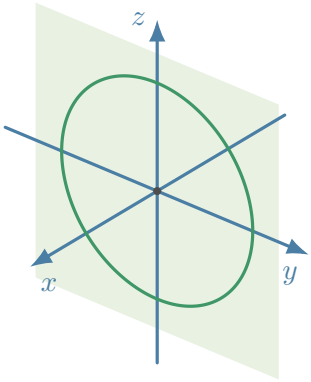
では、幾何学的にはこの空間はどのような形をしているのでしょうか。まず、$\mathbb{R}^3$ の中でよく使う3つの2次元断面、つまりxy 平面、yz 平面、xz 平面を調べてみましょう。それぞれの平面では、x, y, z のうち1つを意図的に0 とすることで、1つの次元を無視します。例えば、xy 平面は方程式$z = 0$ で定義されます。上の公式に$z = 0$ を代入すると、半径r の円の定義が再び得られます。

$$x^2 + y^2 + 0^2 = r^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

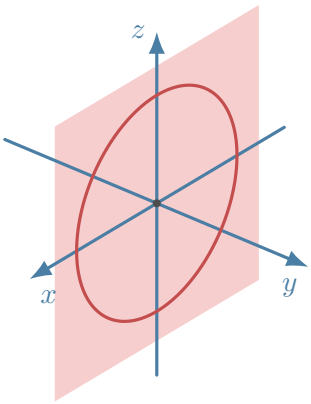
幾何学的には、これは球面がxy 平面上に半径r の円を描くことを意味します。実際、3つの平面すべてで同じことが起こります。



xy 平面上の半径r の円

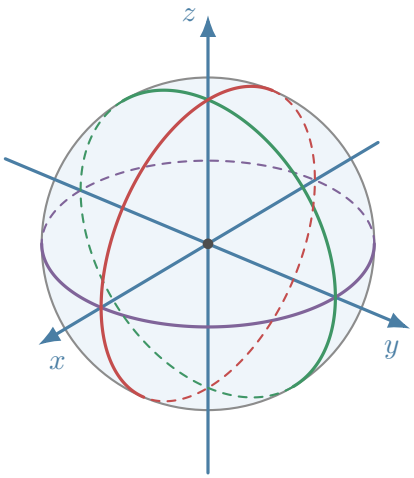


yz 平面上の半径r の円



xz 平面上の半径r の円

上の図は、全体としては2次元である図形の、単なる「1次元の断面」にすぎません。一般には、この方程式を満たすその他すべての点も含める必要があります。その結果、次のような図形が得られます。



この空間は2-球面、より一般的には単に球面と呼ばれます。

2-球面

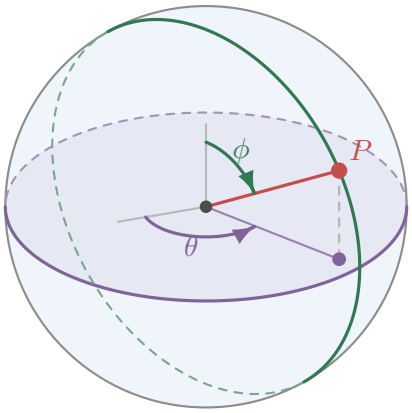
原点を中心とする半径r の球面とは、

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

を満たすすべての点(x, y, z) の集合です。

4.2　球面上を移動する

円は1次元の図形です。つまり、円上の位置を表すために必要な数は1つだけです。実際、その数はθ です。それに対して、球面は2次元の図形なので、その上の点を表すためには2つの数が必要になります。これにはいくつかの方法がありますが、ここではそのうちの一つだけを簡単に紹介します。次の図を考えてください。



ここでは、球面上に描かれた2つの円を考えています。一つは赤道上の円で、もう一つは北極を通る円です。ある点の位置を決めるには、まず北極から角度ϕ だけ下へ移動し、その後、角度θ だけ球面のまわりを回転すると考えることができます。参考までに、この2つの角度には特別な名前があります。

- 角度ϕ は極角と呼ばれます。これは、北極から下方向へどれだけ回転したかを表します。
- 角度θ は方位角と呼ばれます。この用語はアラビアの天文学者に由来します。

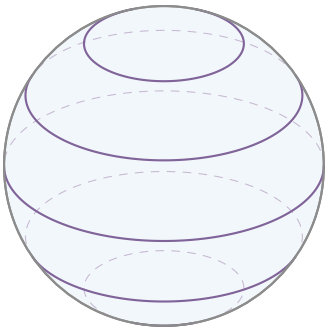
この2つを合わせると、半径r の2-球面上の点を2つの数(θ, ϕ) を使って表すことができます。角度θ は球面のまわりをどれだけ回転したかを表し、ϕ は北極からどれだけ下へ移動したかを表します。

4.3 緯度と経度

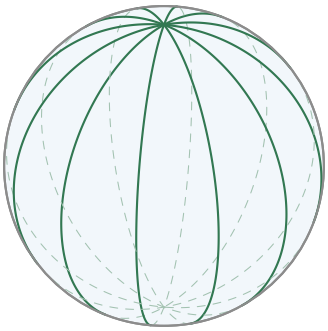
大まかに言えば、地球は球面としてモデル化できます。地図でよく見る緯線と経線は、球面上の曲線に対応しています。

- 緯線ではϕ の値を固定し、θ を自由に変化させます。その結果、高さの異なる水平な円ができます。
- 経線ではθ の値を固定し、ϕ を自由に変化させます。その結果、北極から南極へ伸びる半円ができます。

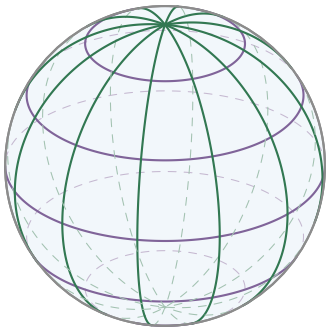
下の図では、北極と南極を通る完全な円も描いています。これらを合わせると、球面上に曲がった座標格子ができます。



緯線



経線



緯線と経線の格子