MAT162 第7讲：正弦与余弦

目录

1 正弦与余弦 **2**

1.1 回顾：圆 2

1.2 正弦与余弦的定义 2

1.3 理解正弦与余弦 4

2 三角恒等式 **6**

2.1 周期性 6

2.2 奇函数与偶函数 7

2.3 勾股恒等式 7

2.4 加法公式 8

3 极坐标 **11**

3.1 二维空间中点的描述 11

3.2 转换为直角坐标 12

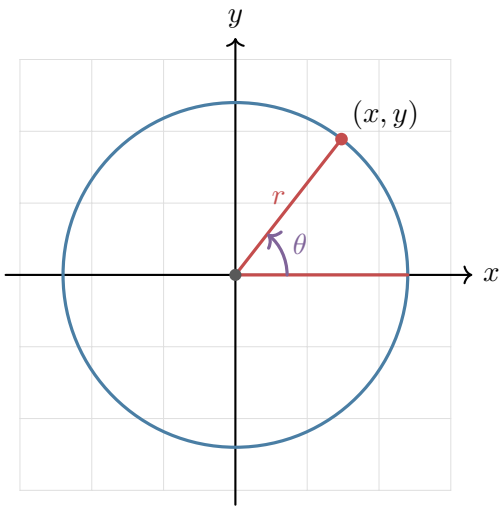
在第6讲中，我们学习了圆的几何。特别地，我们看到圆上的一个点可以用角度θ 来描述，而弧度为我们提供了一种自然的角度度量方式。在本讲中，我们将使用完全相同的图形来定义两个重要函数：正弦和余弦。

我们首先让一个点沿单位圆运动，并记录它的水平坐标和垂直坐标。接着，我们将学习正弦和余弦所满足的一些恒等式。在本讲的后半部分，我们将使用同样的几何图形来引入极坐标。

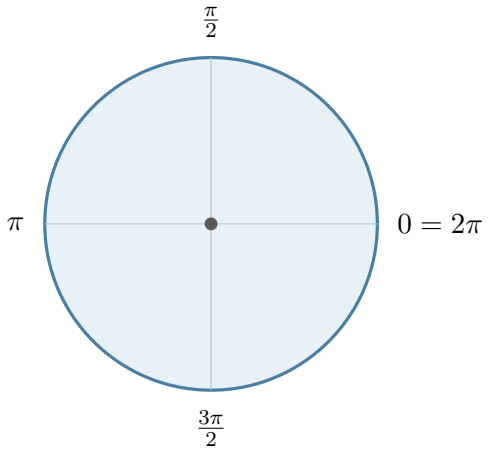
1 正弦与余弦

1.1 回顾：圆

回顾第6讲，以原点为圆心、半径为r 的圆，是所有满足方程$x^2 + y^2 = r^2$ 的点(x, y) 的集合。正如上一讲所看到的，这个方程其实就是距离公式的另一种形式。因此，按照定义，圆上的每一个点与原点的距离都恰好为r。由于圆是一维对象，我们只需要一个数就可以描述它上面的点。最简单的方法是使用θ，它表示径向线段与正x 轴之间的角度：

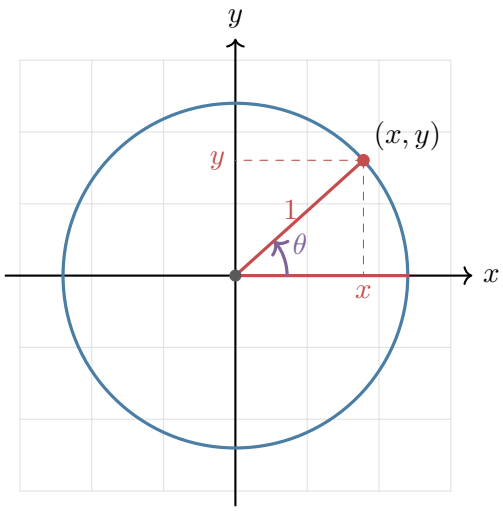


按照约定，这些角度从正x 轴开始逆时针测量。我们还将统一使用弧度，也就是说，绕圆完整旋转一周的总角度为2π。按照这一约定，$90°$、$180°$ 或$270°$ 等熟悉的角度，都可以写成2π 的适当比例：



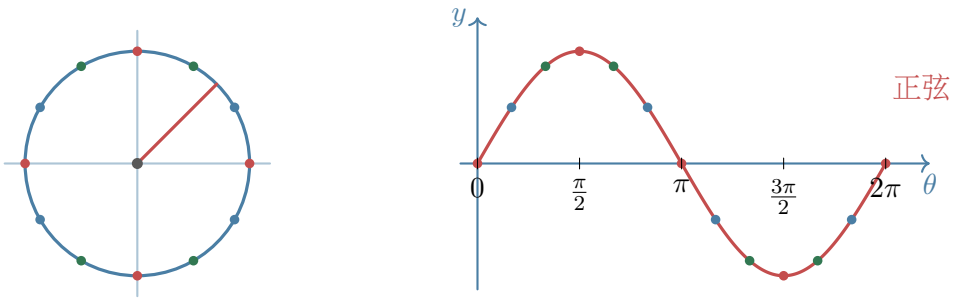
1.2 正弦与余弦的定义

现在考虑半径为1 的圆，也就是所谓的“单位圆”。由于这个圆位于$\mathbb{R}^2$ 中，因此任意角度θ 都可以通过向两个坐标轴投影来确定一对直角坐标(x, y)：



现在假设我们取一个从$\theta = 0$ 开始的点，并缓慢增大θ 的值，使这个点沿圆周完整旋转一周。随着这一过程进行，点首先会上升，并在$\theta = \frac{\pi}{2}$ 时到达最高点，然后开始沿圆的另一侧下降。它继续下降，并在$\theta = \pi$ 时第二次穿过x 轴，然后继续运动，在$\theta = \frac{3\pi}{2}$ 时到达最低点。之后，点又开始沿圆周上升，并在$\theta = 2\pi$ 时回到最初的起点。

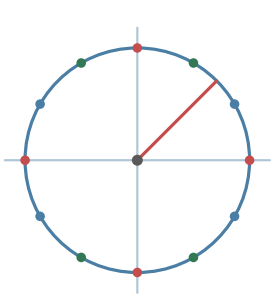
如果我们记录这个点沿圆周运动时的准确高度，就会得到下面的图像：



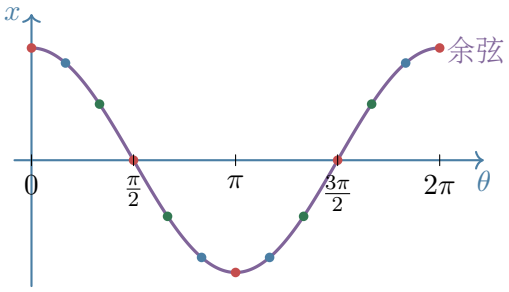
类似地，如果我们记录这个点沿圆周运动时的水平方向位置，那么：

- 当$\theta = 0$ 时，点的水平坐标从1 开始。这是因为我们使用的是单位圆，因此它的起点就是$(1, 0)$。
- 随着θ 增大并且点开始沿圆周移动，它的水平位移会越来越小。当它在$\theta = \frac{\pi}{2}$ 时经过圆的最高点，点恰好位于y 轴上，因此坐标为$(0, 1)$，也就是说，它的水平位移恰好为0。
- 继续增大θ 后，点会在x 方向上开始远离 0。当点沿圆的另一侧向下移动时，它会在$\theta = \pi$ 时穿过x 轴。此时点的坐标为$(-1, 0)$。
- 继续运动后，点会进入圆的下半部分。在$\theta = \frac{3\pi}{2}$ 时，它会穿过y 轴，并再次具有零水平位移，也就是坐标$(0, -1)$。
- 最后，当$\theta = 2\pi$ 时，点会回到起点$(1, 0)$。

从图像上看，如果把水平位移画成θ 的函数，就得到：



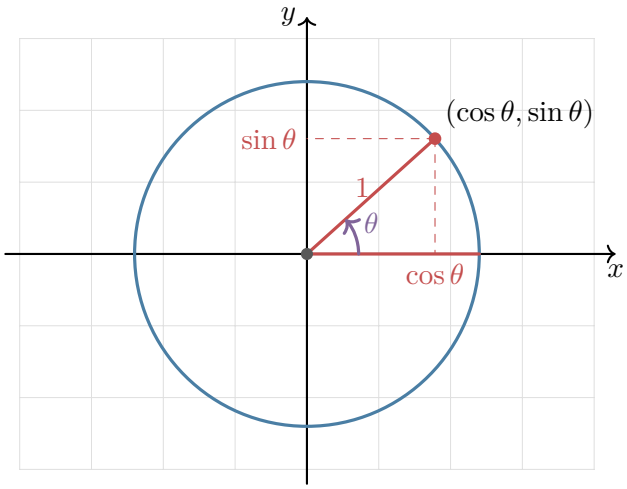
单位圆



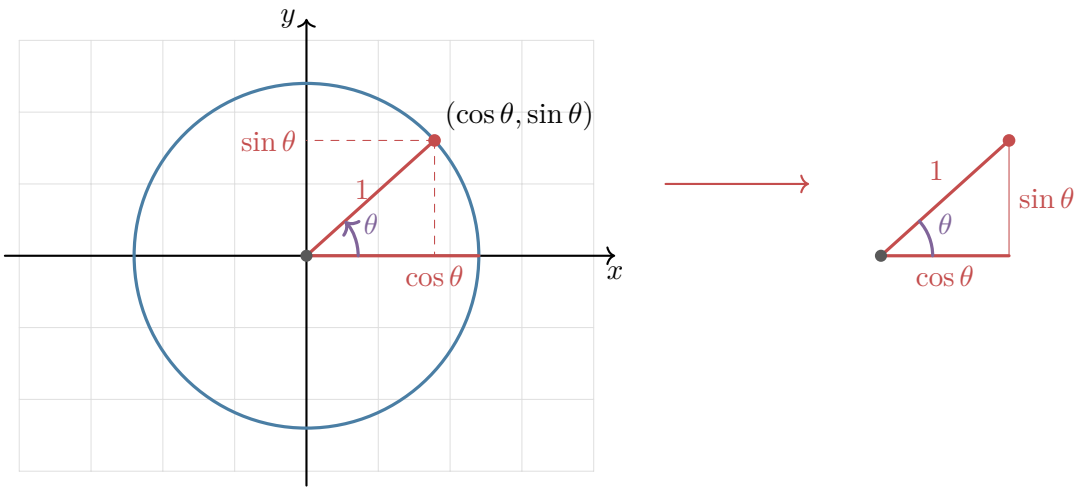
这两条波形分别定义了正弦函数和余弦函数。

1.3 理解正弦与余弦

按照定义，正弦和余弦就是一个点绕单位圆旋转时的垂直坐标和水平坐标。因此，在任意时刻，点的x 分量和y 分量分别由$\cos\theta$ 和$\sin\theta$ 给出：



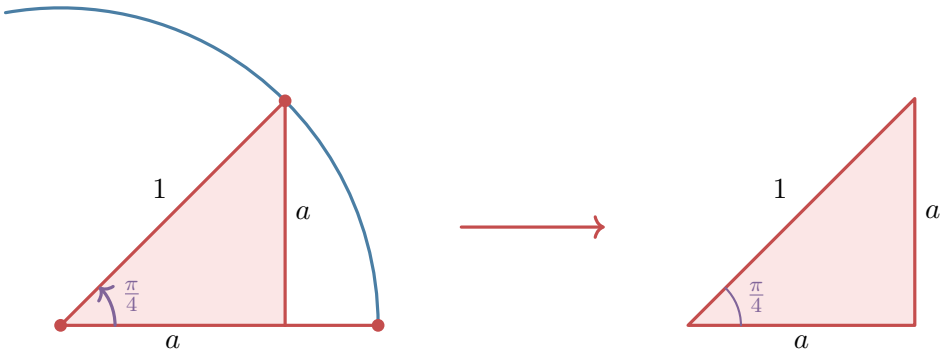
一般来说，我们常常把正弦和余弦，或者更广泛地说三角学，看作对三角形的研究。如下图所示，通过把圆上的点投影到两个坐标轴上，我们总是可以构造一个直角三角形：



正弦与余弦

单位圆上与角度θ 对应的点，其坐标为$(\cos(\theta), \sin(\theta))$。因此，$\cos(\theta)$ 表示水平位置，而$\sin(\theta)$ 表示垂直位置。

作为第一个例子，假设我们把一个点旋转$\theta = \frac{\pi}{4}$，也就是45 度。在这种情况下，我们构造出的三角形有两条边长度相等：



勾股定理告诉我们：

$$1^2 = a^2 + a^2 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 2a^2$$

因此$a^2 = \frac{1}{2}$。由于$a > 0$，所以

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由于这两条边正好就是正弦分量和余弦分量，因此我们得到

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

假设单位圆上与角度θ 对应的点坐标为(x, y)。我们定义水平坐标为$\cos(\theta)$，垂直坐标为$\sin(\theta)$。换句话说，

$$(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

2 三角恒等式

正弦和余弦来自同一个几何图形，因此这两个函数之间存在许多不同的关系。下面列出一些有用的恒等式。

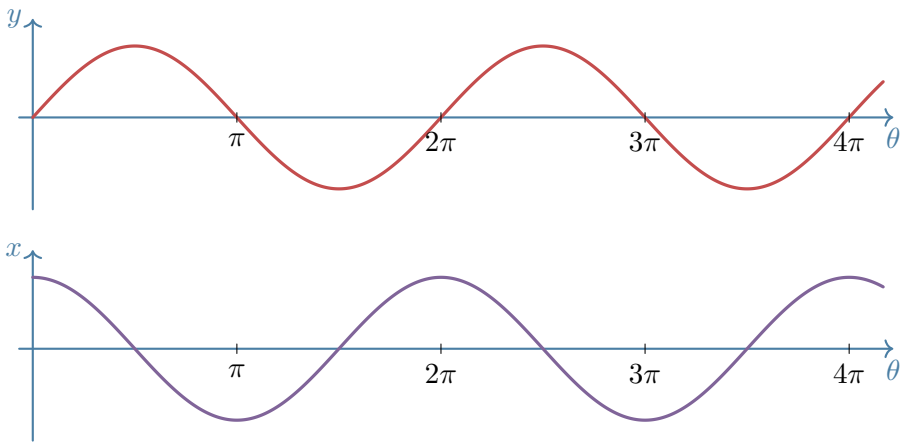
一些三角恒等式

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta), \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta),$$
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta), \qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta),$$
$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1,$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi),$$
$$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi),$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta), \qquad \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta).$$

下面我们将利用圆的几何，一个一个地理解这些恒等式。

2.1 周期性

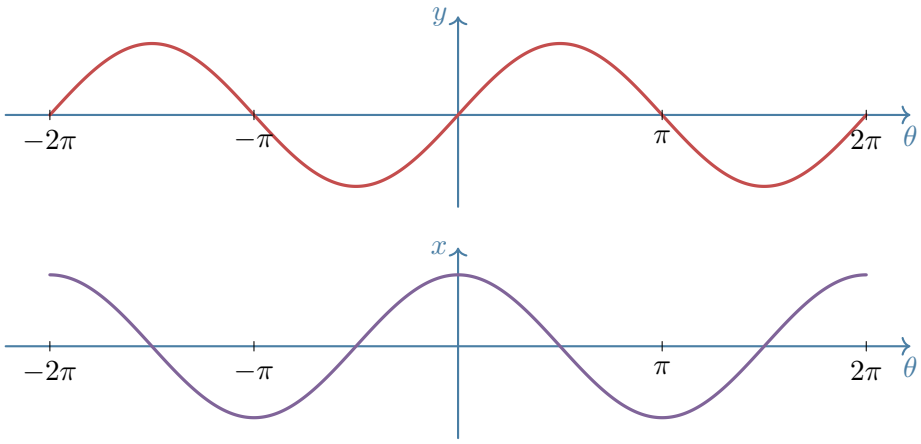
假设我们从$\theta = 0$ 开始。当我们让点沿圆完整旋转一周时，角度增加了2π，然后点回到起始位置。如果在此之后继续增加角度，那么我们只是在第二次重复同样的圆周运动。这意味着，θ 和$\theta + 2\pi$ 所对应的所有坐标都完全相同。从图像上看，这意味着正弦波和余弦波会再次重复：



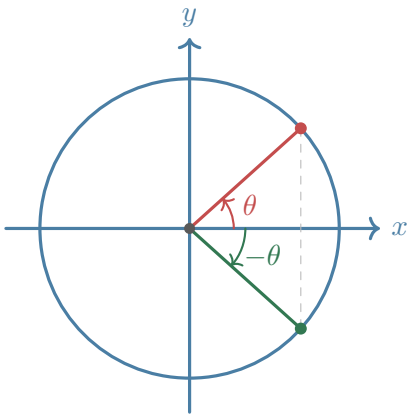
从代数上看，这解释了为什么$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$ 以及$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$。像这样函数值会重复出现的函数称为周期函数。正弦和余弦都是周期函数，其周期均为2π。

2.2 奇函数与偶函数

如果函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足$f(x) = f(-x)$，那么称f 为偶函数；如果满足$-f(x) = f(-x)$，那么称f为奇函数。从图像上看，偶函数关于y 轴对称，而奇函数同时关于x 轴和y 轴翻转，也就是说，它们具有一种旋转对称性。正弦和余弦的图像恰好具有这些对称性：



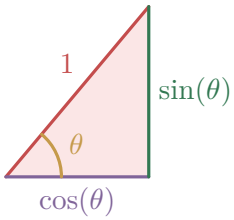
这可以直接从单位圆的几何看出来。为了理解负角度，我们可以想象让点沿圆周反方向旋转。事实上，与两个角度θ 和$-\theta$ 对应的点，其水平坐标始终完全相同，而垂直坐标的符号相反：



因此，$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$，所以余弦是偶函数。另一方面，$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$，所以正弦是奇函数。

2.3 勾股恒等式

对于单位圆上的任意一点，我们都可以把它垂直投影到x 轴上。这样会形成一个直角三角形，它的斜边为1，水平边的带符号长度为$\cos(\theta)$，垂直边的带符号长度为$\sin(\theta)$：



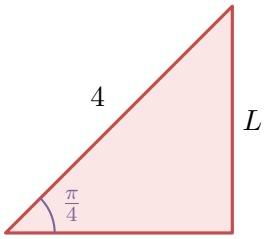
对这个三角形应用勾股定理，可以立即得到：

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1.$$

同样的表示方法也适用于半径为r 的圆。在这种情况下，对应三角形的两条边为$r\cos(\theta)$ 和$r\sin(\theta)$，因此勾股定理告诉我们：

$$r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2.$$

为了进一步说明这一点，我们来看一个例子。假设有如下直角三角形：

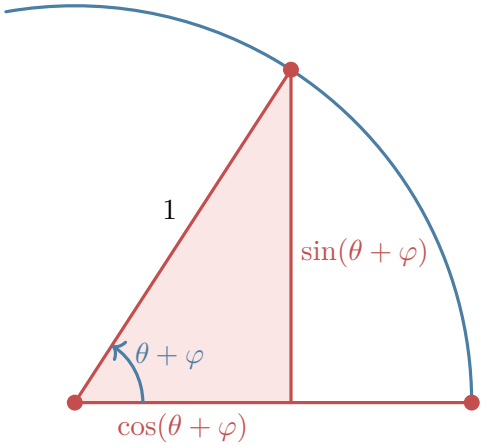


也就是说，斜边长度为4，其中一个内角为$\frac{\pi}{4}$。我们可以使用$r\sin(\theta)$ 来计算L 的长度，因此

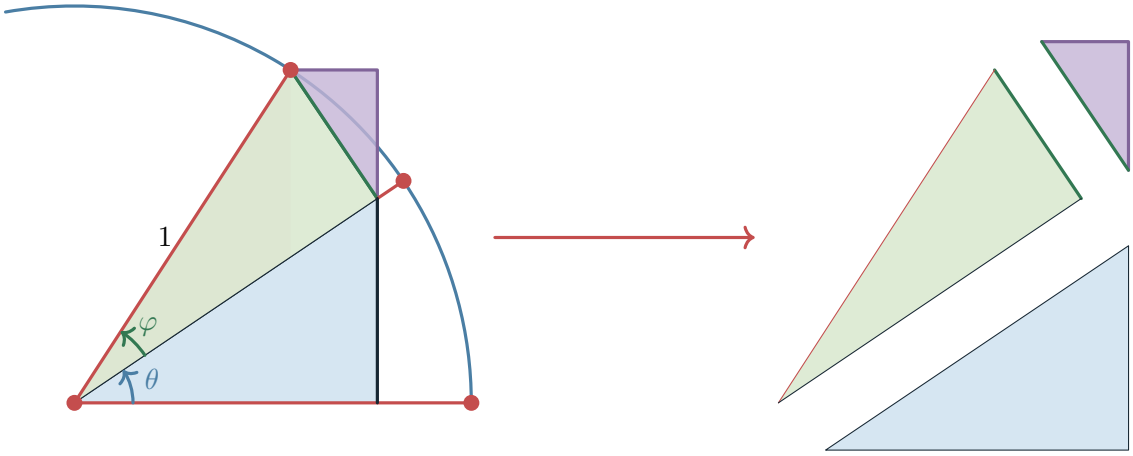
$$L = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

2.4 加法公式

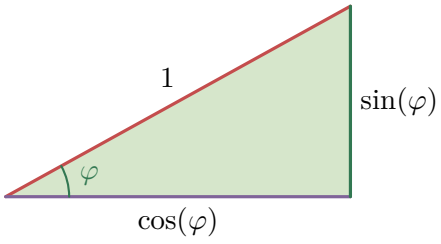
现在我们来看包含$\sin(\theta+\varphi)$ 和$\cos(\theta+\varphi)$ 的两个恒等式。这两个恒等式的推导稍微复杂一些，我们将从几何角度来理解它们。首先注意，这两个表达式分别对应下图中的长度：



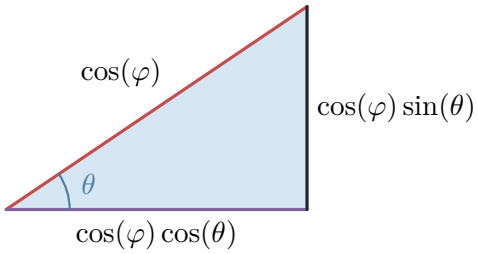
现在我们来寻找一种巧妙的方法描述$\cos(\theta+\varphi)$ 和$\sin(\theta+\varphi)$ 这两个长度。首先要弄清楚“$\theta+\varphi$”究竟意味着什么。单位圆上的每一个点都可以描述为从x 轴出发，按照某个角度逆时针旋转得到。如果把两个角度θ 和φ 相加，那么这意味着先旋转θ，然后再旋转φ。我们现在把旋转$\theta+\varphi$ 分成一个θ 部分和一个φ 部分，并构造三个重要的三角形：



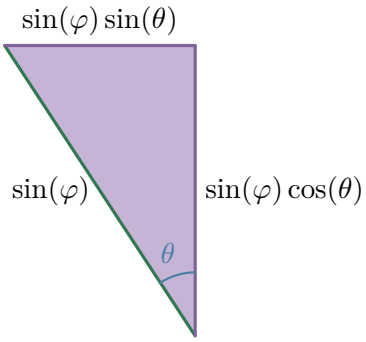
下面我们描述这三个三角形各自的尺寸。先从绿色三角形开始。首先，它的斜边等于1（因为我们使用的是单位圆）。它的内角等于φ，因此另外两条边分别为$\cos(\varphi)$ 和$\sin(\varphi)$：



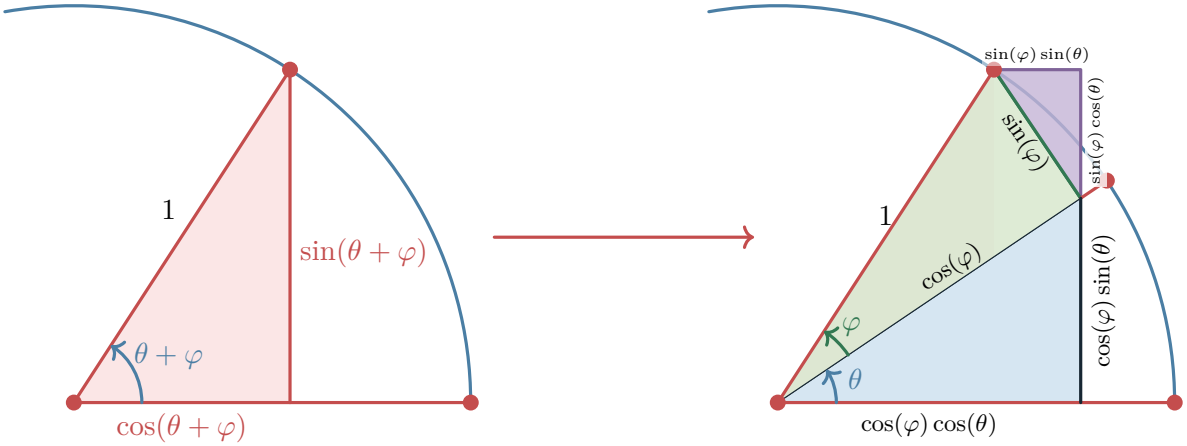
接下来考虑蓝色三角形。在这种情况下，它的斜边与绿色三角形相连，因此其长度为$\cos(\varphi)$。蓝色三角形的内角等于θ，所以根据三角学，蓝色三角形另外两条边的长度分别为$\cos(\varphi)\cos(\theta)$ 和$\cos(\varphi)\sin(\theta)$：



最后考虑紫色三角形。它的斜边直接与绿色三角形相连，因此其长度等于$\sin(\varphi)$。此外，绿色边位于一个直角三角形中，所以经过一些基本的角度计算[1]，可以得到紫色三角形中我们关注的角度等于θ。因此，紫色三角形另外两条边的长度分别为$\sin(\varphi)\sin(\theta)$ 和$\sin(\varphi)\cos(\theta)$：



现在我们把三个三角形重新组合起来，并与原来的图进行比较：



直接比较可以看出，红色三角形的高度等于两个较小的垂直长度之和。用公式表示，我们得到第一个恒等式：

$$\sin(\theta+\varphi)=\sin(\theta)\cos(\varphi)+\cos(\theta)\sin(\varphi).$$

[1]任意三角形的内角和等于π 弧度，而一条直线上的角度和也等于π。利用蓝色三角形的内角和可以求出缺少的角度，而这个角度同样出现在紫色三角形对应的顶点处。

对于另一个恒等式，我们注意到，蓝色三角形的水平边长度等于$\cos(\theta+\varphi)$ 与小紫色三角形的边长之和。用公式表示：

$$\cos(\theta)\cos(\varphi) = \cos(\theta+\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi),$$

整理后得到：

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi).$$

至于恒等式

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta), \qquad \text{以及} \qquad \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta),$$

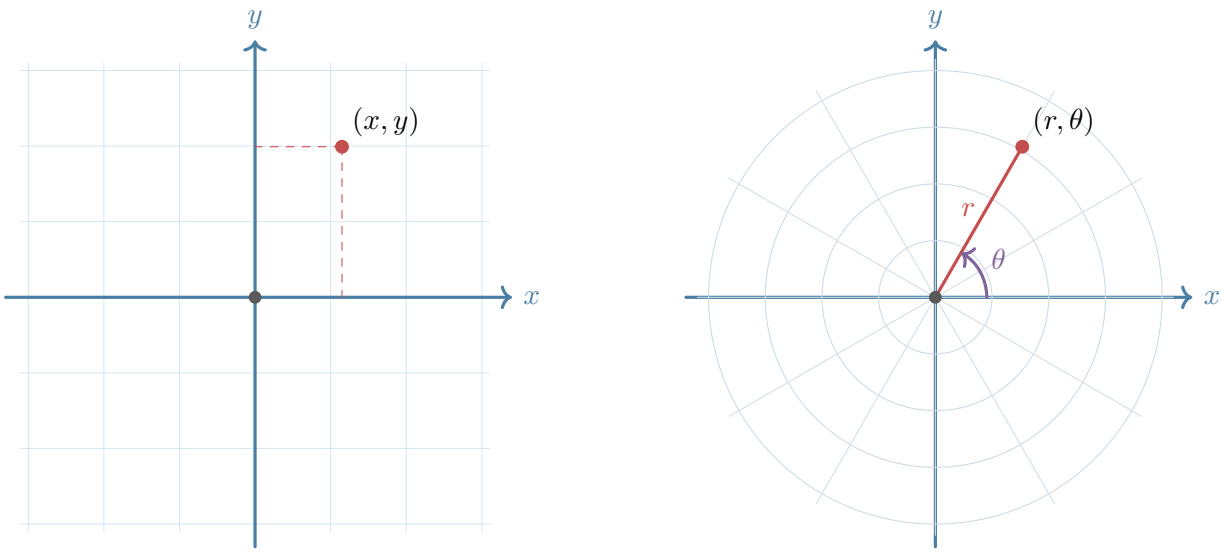
我们只需令$\varphi = \theta$，然后化简即可。

3 极坐标

3.1 二维空间中点的描述

考虑$\mathbb{R}^2$ 中的一个点。通常，我们相对于原点来描述一个点。在使用直角坐标时，我们使用点的x 分量和y 分量：先规定水平方向和垂直方向，然后坐标对(x, y) 告诉我们应当如何从原点移动到这个点。

然而，从原则上说，这并不是描述一个给定点的唯一方式。在第5讲中，我们看到可以进行坐标变换（这些变换由2×2 矩阵表示），从而在$\mathbb{R}^2$ 中产生其他网格。现在我们要介绍一种完全不同的方法：极坐标。考虑下图。



在这张图中，我们画了两个$\mathbb{R}^2$ 的副本，并把同一个点画了两次。在左侧，我们用直角坐标描述这个点：$p = (x, y)$。在右侧，我们用一个半径和一个角度来描述这个点：$p = (r, \theta)$。可以把后一种

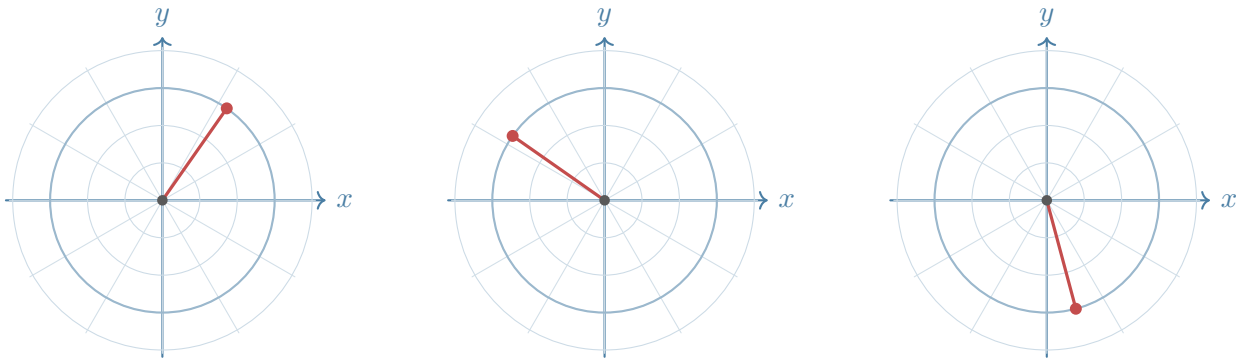
方法理解为另一种移动指令：为了在$\mathbb{R}^2$ 中找到p，我们先从原点沿正x 轴移动距离r，然后绕原点旋转，直到到达p。

极坐标

平面上的一个点可以用数对(r, θ) 表示，其中r 是它到原点的距离，θ 是从正x 轴开始测量的角度。

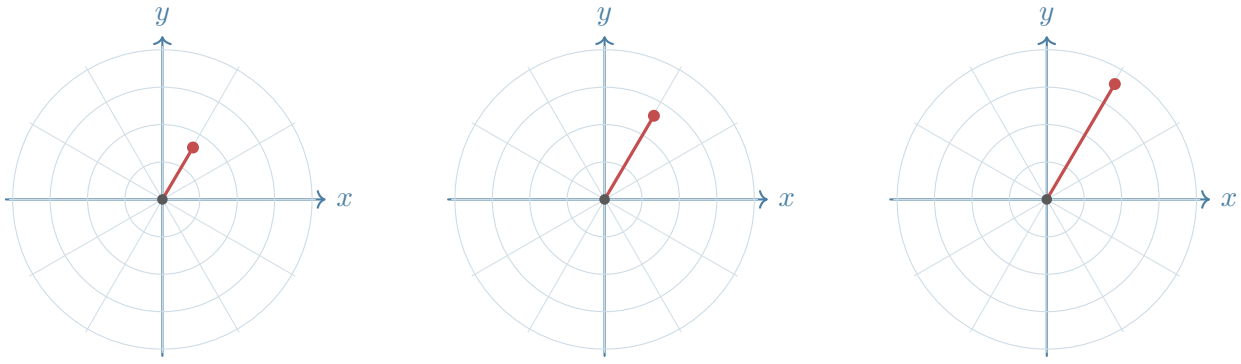
事实上，我们可以对$\mathbb{R}^2$ 中的任意一点这样做，因为每个点p 都有一个到原点的距离，因此它位于某个半径为r 的圆上。用稍微诗意一点的说法，我们可以把$\mathbb{R}^2$ 看成一个半径无限大的圆盘。

在上图中，圆和射线形成了一种非线性网格：它们分别是θ 保持不变的射线，或r 保持不变的圆。如果固定r 并改变θ，点就会沿圆周运动：



相同的r，不同的θ

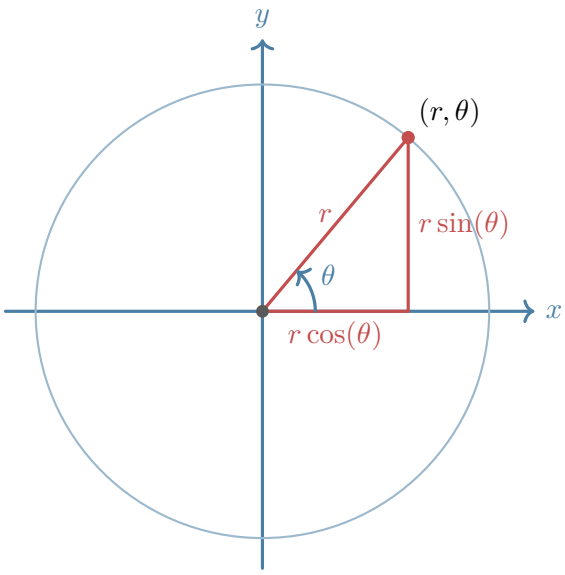
另一方面，如果固定θ 并改变r，点就会沿一条射线向原点靠近或远离原点：



相同的θ，不同的r

3.2 转换为直角坐标

假设点p 的极坐标为(r, θ)。由于p 位于二维空间中的一个圆上，我们可以把它投影到x 轴，从而得到与之前完全相同的直角三角形，只不过现在斜边长度为r 而不是1：



因此，根据第2.3节，点p 可以用直角坐标表示为$x = r\cos(\theta)$ 和$y = r\sin(\theta)$。距离公式还给出$r^2 = x^2 + y^2$。

极坐标与直角坐标

对于用极坐标表示的点$p = (r, \theta)$，我们可以使用

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta)$$

把它转换为直角坐标(x, y)。

为了说明这有多么有用，考虑下面这个故意写得不太好看的方程：

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 16.$$

我们可以把方程左边因式分解为$(x^2 + y^2)^2 = 16$。由于$x^2 + y^2 = r^2$，这就变成$r^4 = 16$。因为r 是距离，所以r 非负。因此，我们得到简单得多的方程$r = 2$。