MAT162 第7講：サインとコサイン

目次

1 サインとコサイン **2**

1.1 復習：円 2

1.2 サインとコサインの定義 2

1.3 サインとコサインの理解 4

2 三角関数の恒等式 **6**

2.1 周期性 6

2.2 奇関数と偶関数 6

2.3 ピタゴラスの恒等式 7

2.4 加法公式 8

3 極座標 **11**

3.1 2次元の点の表し方 11

3.2 直交座標への変換 13

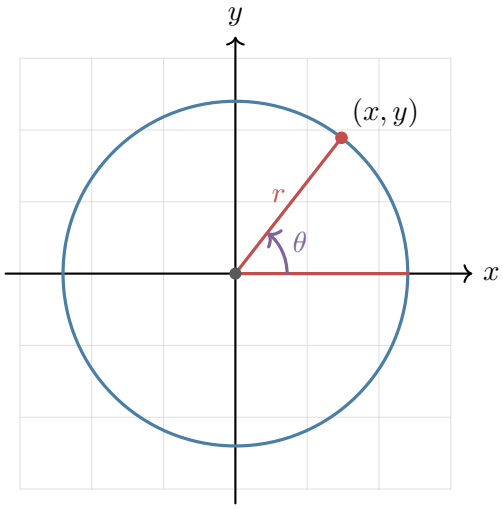
第6講では、円の幾何学について学びました。特に、円周上の点は角度θ によって表すことができ、ラジアンを使うことでこの角度を自然に測ることができることを確認しました。この講義では、まったく同じ図を使って、サインとコサインという2つの重要な関数を定義します。

まず、単位円上を動く点を追跡し、その水平方向と垂直方向の座標を記録します。次に、サインとコサインが満たすいくつかの恒等式を学びます。講義の後半では、同じ幾何学を使って極座標を導入します。

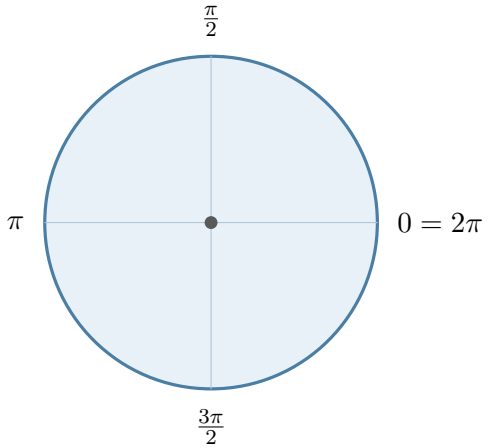
1　サインとコサイン

1.1　復習：円

第6講を思い出すと、原点を中心とする半径r の円とは、方程式$x^2 + y^2 = r^2$ を満たすすべての点(x, y) の集合でした。前回見たように、この方程式は実は距離の公式を別の形で書いたものです。したがって、定義から、円周上のすべての点は原点からちょうど距離r だけ離れています。円は1次元の図形なので、その点を表すために必要な数は1つだけです。最も簡単な方法はθ を使うことで、これは動径と正のx 軸との間の角度を表します：



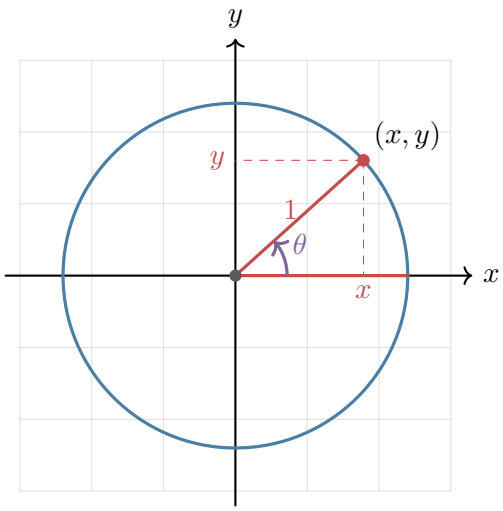
慣例として、これらの角度は正のx 軸から反時計回りに測ります。また、ここからはラジアンを使うことにします。つまり、円を1周すると角度の合計は2π になります。この約束のもとでは、90°、180°、270° などのよく知られた角度は、2π の適切な割合として求めることができます：



1.2　サインとコサインの定義

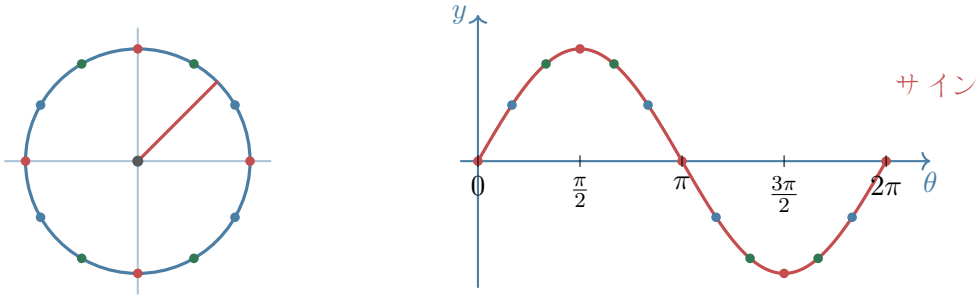
ここで、半径1 の円、すなわちいわゆる「単位円」を考えます。この円は$\mathbb{R}^2$ の中にあるので、

任意の角度θ に対して、2つの軸へ射影することにより直交座標(x, y) が定まります：



次に、$\theta = 0$ から出発する点を取り、θ の値をゆっくり増加させて、その点を円の周りに1周させるとします。すると、点はまず上昇し、$\theta = \frac{\pi}{2}$ で最高点に達した後、円の反対側を下降し始めます。そのまま下降し、$\theta = \pi$ で2回目にx 軸を通過し、さらに進んで$\theta = \frac{3\pi}{2}$ で最低点に達します。その後、点は再び上昇し始め、$\theta = 2\pi$ で元の出発点に戻ります。

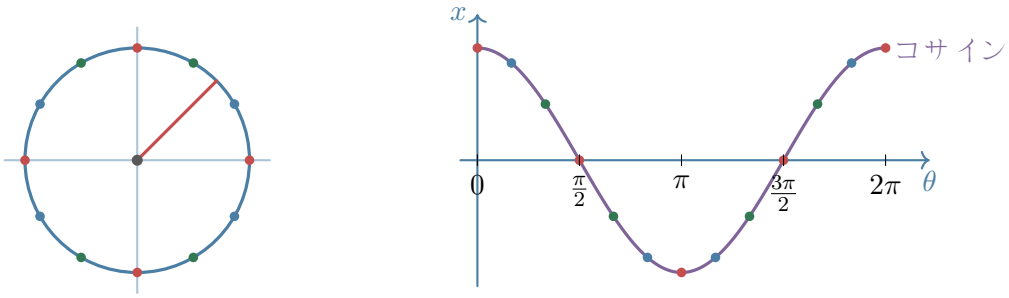
点が円周上を動くとき、その正確な高さを記録すると、次のグラフが得られます：



同様に、点が円の周りを移動するときの水平方向の動きを記録すると、次のようになります：

- $\theta = 0$ では、点の水平座標は1 から始まります。単位円を考えているので、出発点は単に$(1, 0)$ です。
- θ が増加して点が円周上を動き始めると、その水平方向の変位はだんだん小さくなります。$\theta = \frac{\pi}{2}$ で円の最上部を通過するとき、点はちょうどy 軸上にあり、座標は$(0, 1)$ になります。したがって、水平方向の変位はちょうど0 です。
- θ をさらに増加させると、点はx 方向に0 から再び離れていきます。点が円の反対側を下降すると、$\theta = \pi$ でx 軸を横切ります。そのとき点の座標は$(-1, 0)$ です。
- さらに進むと、点は円の下半分へ移動します。$\theta = \frac{3\pi}{2}$ ではy 軸を横切り、再び水平方向の変位は0、つまり座標は$(0, -1)$ になります。
- 最後に、$\theta = 2\pi$ で点は出発点$(1, 0)$ に戻ります。

視覚的には、水平方向の変位をθ の関数として描くと、次のようになります：

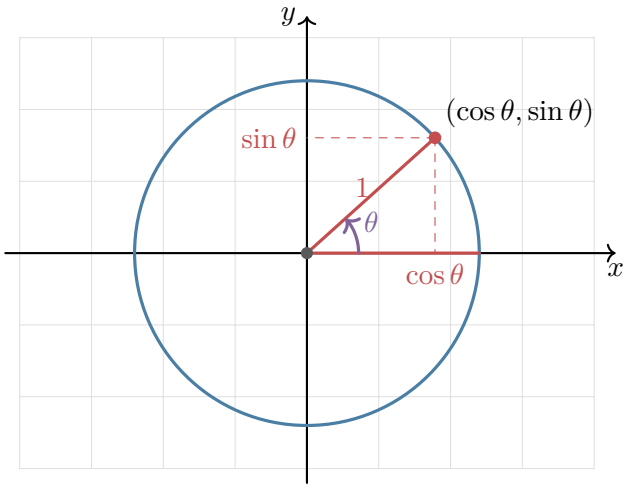


単位円

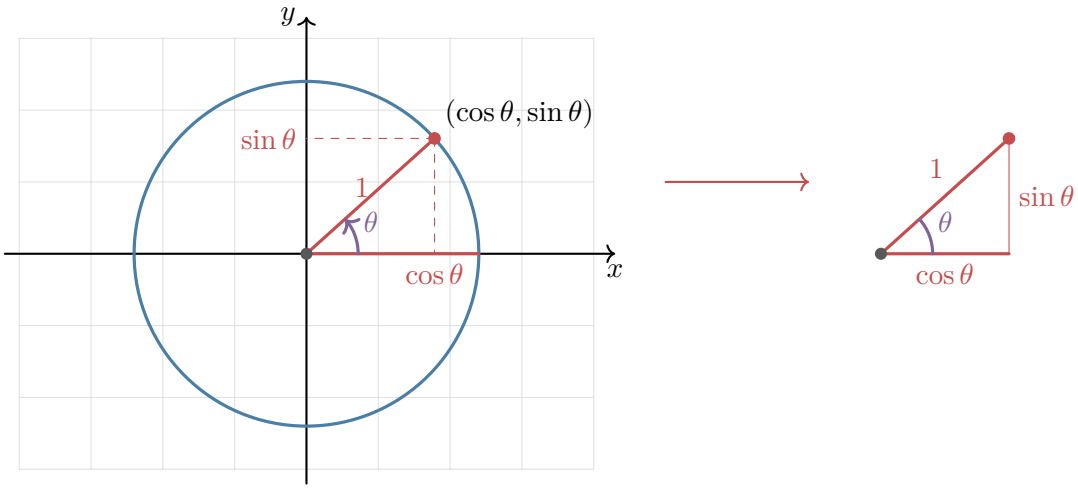
この2つの波が、サイン関数とコサイン関数を定義します。

1.3 サインとコサインの理解

定義より、サインとコサインは、点が単位円上を回転するときの垂直方向と水平方向の座標そのものです。したがって、任意の時点で、点のx 成分とy 成分はそれぞれ$\cos\theta$ と$\sin\theta$ で与えられます：



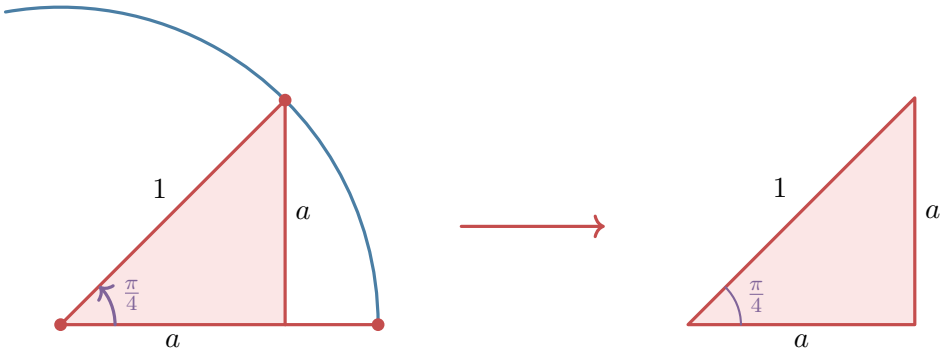
一般に、サインとコサイン、あるいは三角法というと、三角形の研究だと考えることが多いです。下の図が示すように、円上の点を2つの座標軸へ射影することで、常に直角三角形を作ることができます：



サインとコサイン

角度θ に対応する単位円上の点の座標は$(\cos(\theta), \sin(\theta))$ です。したがって、$\cos(\theta)$ は水平方向の位置、$\sin(\theta)$ は垂直方向の位置を表します。

最初の例として、点を$\theta = \frac{\pi}{4}$、つまり45 度だけ回転させるとします。この場合、できる三角形は2つの辺の長さが等しくなります：



ピタゴラスの定理より：

$$1^2 = a^2 + a^2 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 2a^2$$

となります。したがって$a^2 = \frac{1}{2}$ であり、$a > 0$ なので、$a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ です。この2つの辺はまさにサイン成分とコサイン成分なので、

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

と結論できます。

角度θ に対応する単位円上の点の座標を(x, y) とします。水平座標を$\cos(\theta)$、垂直座標を$\sin(\theta)$ と定義します。つまり、$(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ です。

2　三角関数の恒等式

サインとコサインは同じ幾何学的な図から生まれるため、この2つの関数にはさまざまな関係があります。いくつかの有用な恒等式を以下にまとめます。

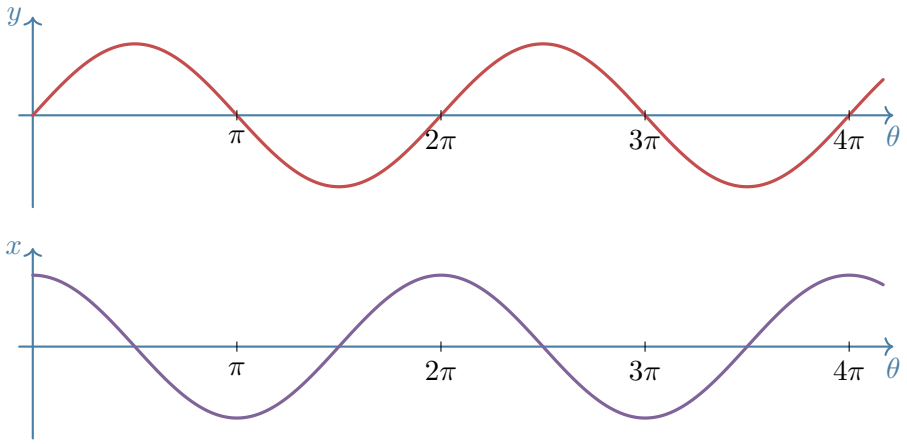
三角関数の恒等式

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin(\theta),\qquad \cos(\theta+2\pi)=\cos(\theta),$$
$$\sin(-\theta)=-\sin(\theta),\qquad \cos(-\theta)=\cos(\theta),$$
$$\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1,$$
$$\sin(\theta+\varphi)=\sin(\theta)\cos(\varphi)+\cos(\theta)\sin(\varphi),$$
$$\cos(\theta+\varphi)=\cos(\theta)\cos(\varphi)-\sin(\theta)\sin(\varphi),$$
$$\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta),\qquad \cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta).$$

ここから、円の幾何学を使って、これらの恒等式を1つずつ理解していきます。

2.1　周期性

$\theta=0$ から始めるとします。点を円の周りに1周させると、角度は2π だけ増加し、その後点は出発位置に戻ります。そこからさらに角度を増加させると、同じ円周上の動きをもう一度繰り返すだけです。したがって、θ と$\theta+2\pi$ に対応する座標はすべて同じになります。グラフで見ると、サインとコサインの波がもう一度そのまま繰り返されるということです：

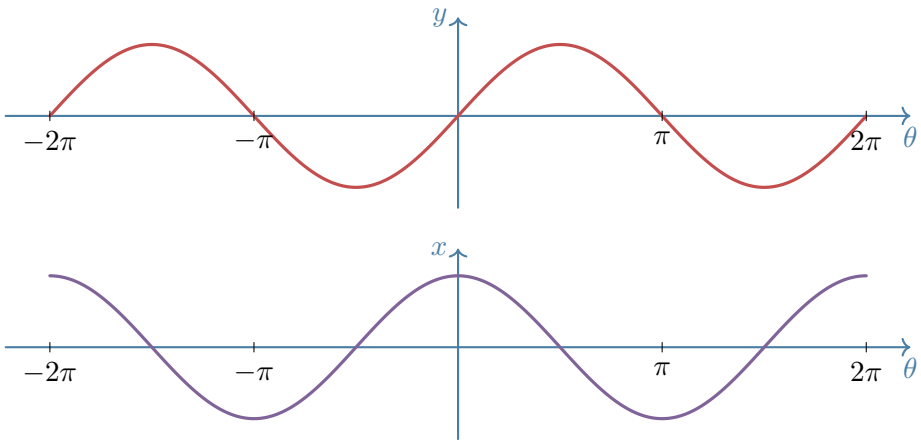


代数的には、これによって$\sin(\theta+2\pi)=\sin(\theta)$ および$\cos(\theta+2\pi)=\cos(\theta)$ が説明できます。このように値が繰り返される関数を周期関数といいます。サインとコサインはいずれも周期関数であり、その周期は2π です。

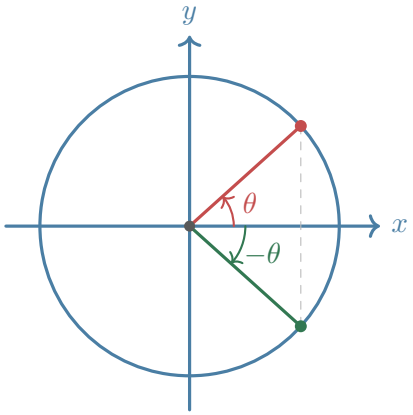
2.2　奇関数と偶関数

関数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が$f(x)=f(-x)$ を満たすとき、f を偶関数といいます。また、$-f(x)=f(-x)$ を満たすとき、f を奇関数といいます。グラフで見ると、偶関数はy 軸について対称であり、奇

関数はx 軸とy 軸の両方について同時に反転した形、つまりある種の回転対称性を持ちます。サインとコサインのグラフは、まさにこのような対称性を持っています：



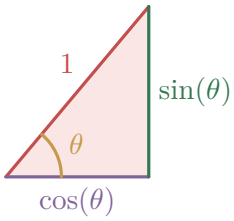
これは単位円の幾何学から直接確認できます。負の角度を考えるには、点を円の周りに逆向きに回転させると考えればよいです。実際、2つの角度θ と$-\theta$ に対応する点は、常に水平方向の変位がまったく同じで、垂直座標だけが反対の符号になります：



したがって、$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ なので、コサインは偶関数です。一方、$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ なので、サインは奇関数です。

2.3　ピタゴラスの恒等式

単位円上の任意の点からx 軸へ垂直に射影することができます。すると、斜辺が1、水平方向の辺の符号付き長さが$\cos(\theta)$、垂直方向の辺の符号付き長さが$\sin(\theta)$ である直角三角形ができます：



この三角形にピタゴラスの定理を適用すると、直ちに

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1.$$

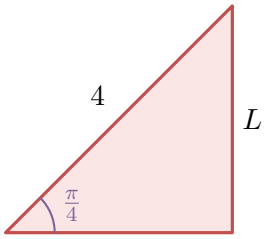
が得られます。

同じ考え方は、半径r の円にも使えます。この場合、対応する三角形の辺は$r\cos(\theta)$ と$r\sin(\theta)$ なので、ピタゴラスの定理から

$$r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2.$$

となります。

これをさらに具体的に見るため、次の直角三角形を考えます：



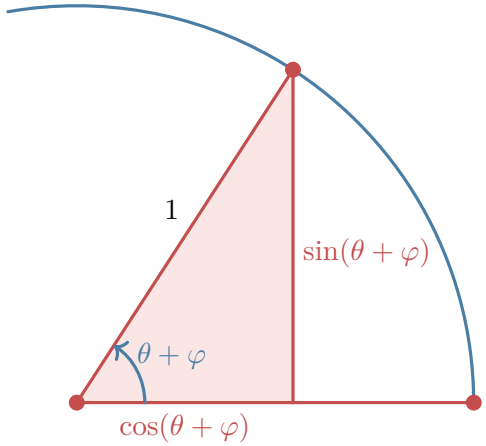
つまり、斜辺の長さは4 で、内角は$\frac{\pi}{4}$ です。$r\sin(\theta)$ を使ってL の長さを求めることができるので、

$$L = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

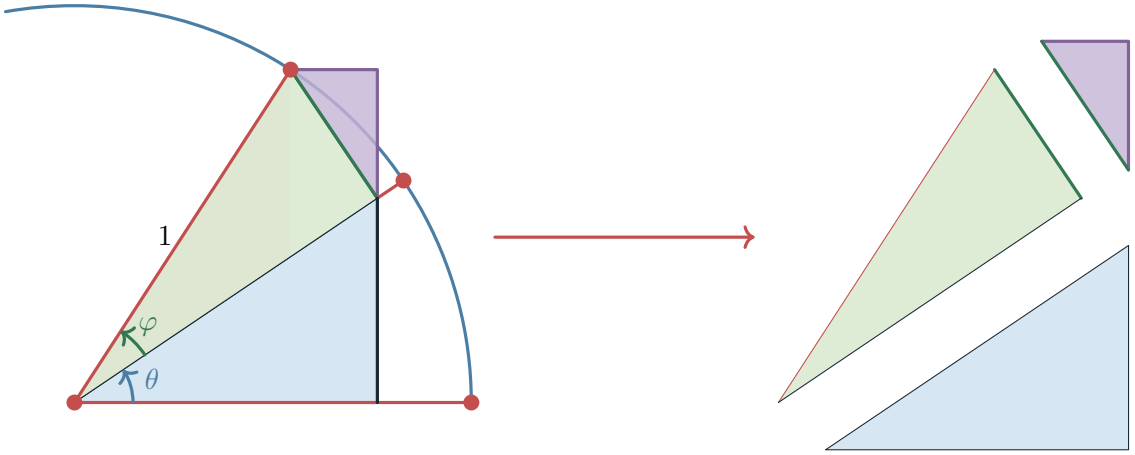
となります。

2.4　加法公式

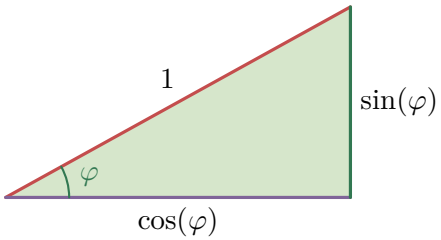
次に、$\sin(\theta+\varphi)$ と$\cos(\theta+\varphi)$ を含む2つの恒等式を考えます。この2つの恒等式の導出は少し複雑ですが、幾何学的な視点から楽しく考えてみましょう。まず、この2つの式は下図の長さに対応していることに注目します：



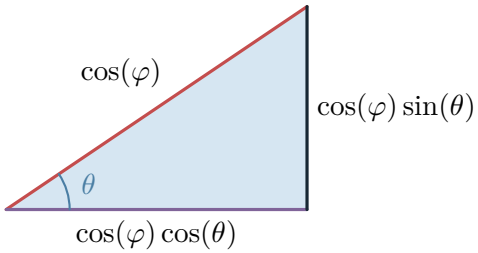
ここから、$\cos(\theta+\varphi)$ と$\sin(\theta+\varphi)$ という2つの長さをうまく表す方法を考えます。まず、「$\theta+\varphi$」が実際に何を意味するのかを確認しましょう。単位円上のすべての点は、x 軸からある角度だけ反時計回りに回転することで表せます。2つの角度θ とφ を足すということは、まずθ だけ回転し、その後さらにφ だけ回転することを意味します。そこで、回転$\theta+\varphi$ をθ の部分とφ の部分に分け、3つの重要な三角形を作ります：



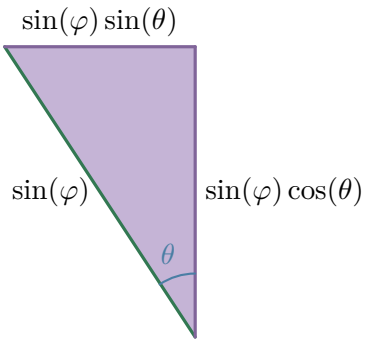
ここから、それぞれの三角形の辺の長さを説明します。まず緑色の三角形から始めます。斜辺の長さは1 です（単位円を使っているためです）。内角はφ なので、残りの2辺は$\cos(\varphi)$ と$\sin(\varphi)$ で与えられます：



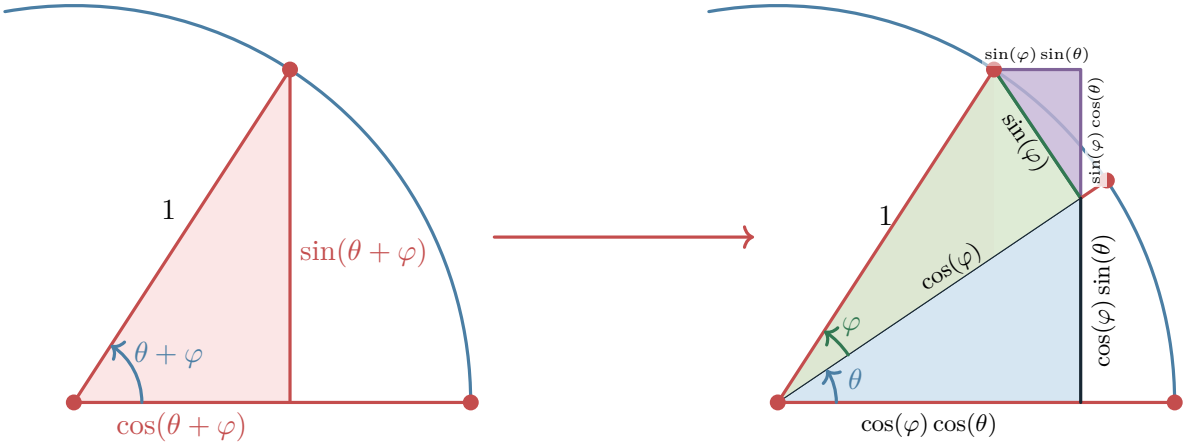
次に青色の三角形を考えます。この場合、斜辺は緑色の三角形につながっているので、その長さは$\cos(\varphi)$ です。青色の三角形の内角はθ なので、三角法より、残りの2辺の長さは$\cos(\varphi)\cos(\theta)$ と$\cos(\varphi)\sin(\theta)$ です：



最後に、紫色の三角形を考えます。その斜辺は緑色の三角形に直接つながっているので、その長さはsin(φ) です。また、緑色の辺は直角三角形の一部になっているため、簡単な角度の計算[1]により、紫色の三角形の注目する角度はθ になります。したがって、紫色の三角形の残りの2辺の長さはsin(φ) sin(θ) とsin(φ) cos(θ) です：



ここで、3つの三角形を元に戻し、最初の図と比較してみます：



直接比較すると、赤色の三角形の高さは、2つの小さい垂直方向の長さの和に等しいことがわかります。式で書くと、最初の恒等式は

$$\sin(\theta+\varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi).$$

[1] 任意の三角形の内角の和はπ ラジアンであり、一直線上の角度の和もπ です。青色の三角形の内角の和から足りない角度を求めることができ、その角度は紫色の三角形の頂点に現れる角度にも同じように寄与します。

となります。

もう一方の恒等式については、青色の三角形の水平方向の辺の長さが、$\cos(\theta+\varphi)$ と小さい紫色の三角形の辺の長さの和になっていることに注目します。式で書くと、

$$\cos(\theta)\cos(\varphi) = \cos(\theta+\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi),$$

となります。これを整理すると、

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi).$$

が得られます。

また、

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta), \qquad \text{および} \qquad \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta),$$

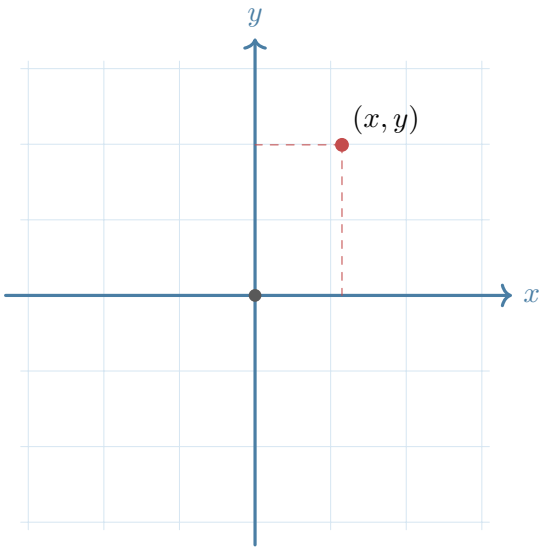
については、単に$\varphi = \theta$ と置いて整理すれば得られます。

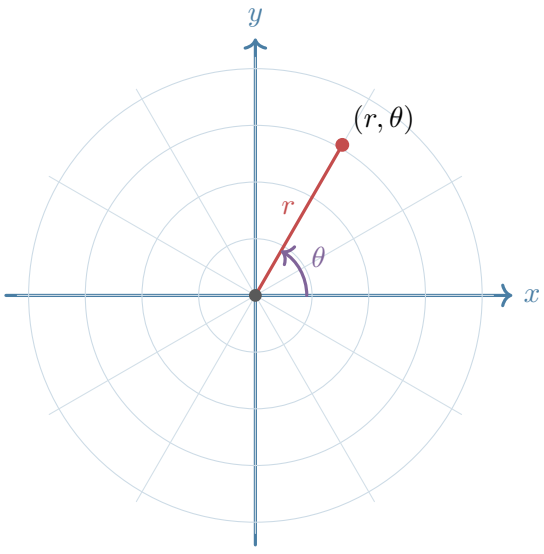
3　極座標

3.1　2次元の点の表し方

$\mathbb{R}^2$ の中の1つの点を考えます。通常、点は原点との関係によって表します。直交座標を使う場合、その情報は点のx 成分とy 成分です。つまり、水平方向と垂直方向を決め、組(x, y) によって原点からその点までどのように移動するかを指示します。

しかし、原理的には、ある点を表すための方法はこれだけではありません。第5講では、座標変換（2×2 行列で表されました）を行うことで、$\mathbb{R}^2$ の中に別の格子を作れることを見ました。ここでは、それとはまったく異なる方法である極座標を考えます。次の図を見てください。





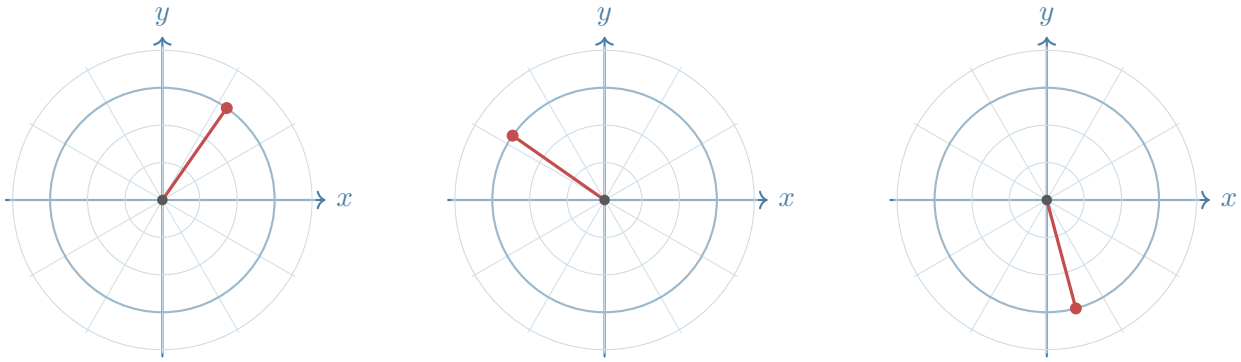
この図には、同じ点を2回描いた$\mathbb{R}^2$ の2つのコピーがあります。左側では、点を直交座標で$p = (x, y)$ と表しています。右側では、点を半径と角度を使って$p = (r, \theta)$ と表しています。後者は別の種類の指示だと考えることができます。$\mathbb{R}^2$ の中でp を見つけるには、まず原点から正のx 軸に沿って距離r だけ進み、その後、p に到達するまで回転します。

極座標

平面上の点は組(r, θ) で表すことができます。ここで、r は原点からの距離、θ は正のx 軸から測った角度です。

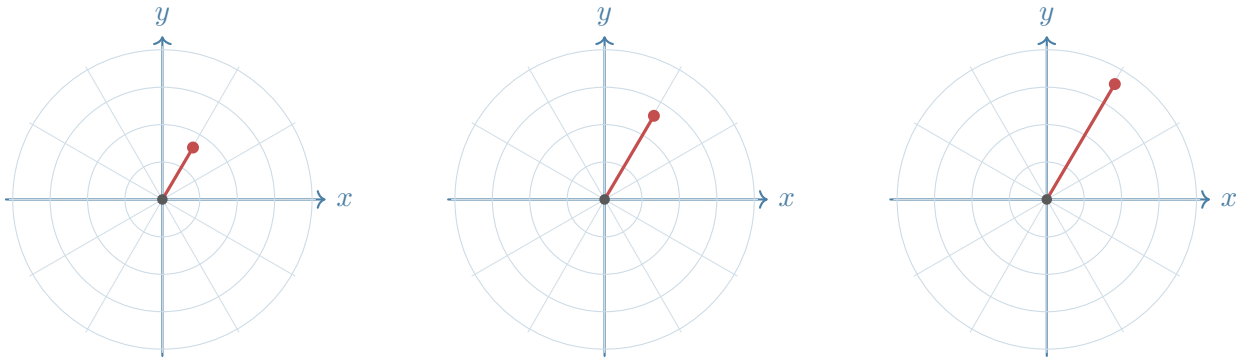
実際、これは$\mathbb{R}^2$ の任意の点に対して行うことができます。どの点p にも原点からの距離があり、そのため半径r の円上にあるからです。少し詩的に言えば、$\mathbb{R}^2$ は半径が無限大の円板だと考えることができます。

上の図では、円と半直線が一種の非線形な格子を作っています。これらは、θ が一定の半直線、またはr が一定の円です。r を固定してθ を変えると、点は円周上を動きます：



同じr、異なるθ

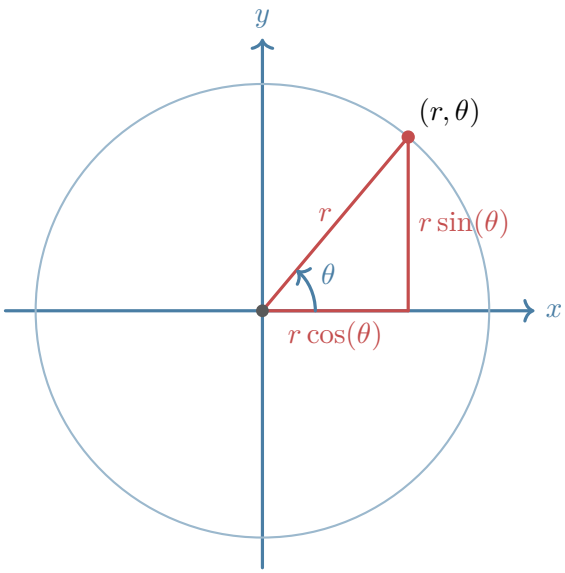
一方、θ を固定してr を変えると、点は半直線上を原点に近づいたり、原点から離れたりします：



同じθ、異なるr

3.2　直交座標への変換

点p の極座標が(r, θ) であるとします。p は2次元空間の円上にあるので、点をx 軸へ射影すると、先ほどとまったく同じ直角三角形を作ることができます。ただし、今回は斜辺の長さが1 ではなくr です：



したがって、2.3節より、点p は直交座標で$x = r\cos(\theta)$、$y = r\sin(\theta)$ と表すことができます。また、距離の公式から$r^2 = x^2 + y^2$ も得られます。

極座標と直交座標

極座標で$p = (r, \theta)$ と表される点は、次の式を使って直交座標(x, y) に変換できます：

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta).$$

これがどれほど便利かを見るために、次の意図的に見た目の悪い方程式を考えます：

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 16.$$

左辺を因数分解すると$(x^2 + y^2)^2 = 16$ となります。$x^2 + y^2 = r^2$ なので、これは$r^4 = 16$ になります。r は距離なので非負です。したがって、はるかに簡単な方程式$r = 2$ が得られます。