MAT162 第9讲：指数函数

Contents

1 指数的运算法则 **2**

1.1 乘法与乘方 2

1.2 零指数与负指数 2

1.3 变量的指数 3

1.4 有理数指数 4

1.5 无理数指数 4

1.6 指数函数的图像 5

1.7 更多例子 7

2 数 e 的定义 **8**

2.1 单利与复利 8

2.2 更频繁地计算复利 9

2.3 指数常数 10

2.4 关于 e 的代数运算 11

在前八讲中，我们学习了实数轴、直线、向量、圆以及三角函数。现在，我们将学习另一类重要的函数，即所谓的指数函数。我们首先复习指数的运算法则，并将自然数指数的熟悉法则推广到整数指数，再推广到有理数指数，甚至无理数指数。接下来，我们将研究指数函数的图像，了解它们如何描述增长和衰减，以及如何利用它们建立复利等过程的数学模型。最后，我们将利用复利公式引入一个非常特殊的数，称为 e。正如我们将在第10讲中看到的，这个数具有一些令人惊讶的性质，为我们即将学习的微积分提供了线索。

1 指数的运算法则

1.1 乘法与乘方

回顾一下，乘以一个自然数实际上就是重复加法的一种简写方式。例如，如果我们将一个数 a 反复相加，共加 n 次，那么结果就是：

$$na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{ 次}}.$$

类似地，我们也可以将一个数 a 反复与自身相乘，得到：

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{ 次}}.$$

这里，数 a 通常称为底数，而数 n 称为指数。正如乘法可以理解为重复加法一样，我们也可以将乘方理解为重复乘法。

现在，我们将介绍几条法则，它们可以帮助我们处理包含指数的代数表达式。以下是基本指数法则的总结。

指数法则

对于正整数 m, n 和非零实数 a, b，有

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$
$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n.$$

需要注意的是，一旦定义了零指数和负指数，所有这些法则都可以直接从指数的定义推导出来。例如，要推导第一条法则 $a^m a^n = a^{m+n}$，我们只需写出 a^m 和 a^n 的定义，然后将它们相乘：

$$a^m a^n = \underbrace{(a \cdots a)}_{m\text{ 次}} \underbrace{(a \cdots a)}_{n\text{ 次}} = \underbrace{a \cdots a \cdot a \cdots a}_{(m+n)\text{ 次}} = a^{m+n}.$$

其他法则也可以用类似的方法推导出来。尝试自己找出推导过程，是一个很好的练习。

1.2 零指数与负指数

乍一看，表达式 a^0 可能有些令人困惑：一个数与自身相乘零次究竟是什么意思？为了弄清楚这一点，我们可以使用法则 $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$。如果令 $m = n$，就得到：

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m}$$

这个分数的分子和分母相同，因此可以约去，得到 $a^0 = 1$。

利用类似的思路，我们也可以尝试理解负指数。例如，考虑 a^{-1}。我们希望这个数是 a 的乘法逆元，因此它与 a 相乘应该得到 1。于是：

$$1 = a \cdot a^{-1} \quad \Longrightarrow \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

更一般地，我们还可以推导出其他负整数指数的法则：

$$1 = a \cdot a^{-1} \quad \Longrightarrow \quad 1^m = (a \cdot a^{-1})^m \quad \Longrightarrow \quad 1 = a^m \cdot (a^{-1})^m \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

零指数与负指数

对于任意非零实数 a 和正整数 m，

$$a^0 = 1, \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}, \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

利用这些法则，我们可以化简一些看起来相当复杂的表达式。例如，考虑：

$$\frac{2^5 \cdot 2^{-3}}{2^4}.$$

我们可以逐步应用指数法则来化简。化简的方法可能有很多种，下面是其中一种：

$$\frac{2^5 \cdot 2^{-3}}{2^4} = \frac{2^5}{2^4 \cdot 2^3} = \frac{2^5}{2^7} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

使用 $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$　　使用 $a^m a^n = a^{m+n}$　　使用 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

其他化简的例子包括：

$$\frac{(3^2)^4}{3^5} = \frac{3^8}{3^5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27,$$

$$\left(\frac{2a^3}{b^2}\right)^2 = \frac{2^2 a^6}{b^4} = \frac{4a^6}{b^4}.$$

请注意，在最后一个表达式中，我们假设 $b \neq 0$，否则就会出现除以零的情况。

1.3 变量的指数

在第1讲中，我们曾简要讨论过 x 或 y 这样的变量，它们可以作为数字的占位符。由于我们的指数法则适用于目前讨论过的数，因此只要表达式有定义，我们就可以对变量使用完全相同的法则。例如，我们可以处理这样的表达式：

$$\frac{x^5 y^{-2}}{x^{-3} y^4}$$

应用前面介绍的法则，可以得到：

$$\frac{x^5 y^{-2}}{x^{-3} y^4} = x^{5-(-3)} y^{-2-4} = x^8 y^{-6} = \frac{x^8}{y^6},$$

使用 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　　计算指数　　使用 $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

这里我们假设 $x, y \neq 0$。这个额外的假设是完全必要的，因为如果 x 或 y 等于零，原来的表达式就会涉及除以零，因此没有定义。

1.4 有理数指数

我们还可以将指数法则推广到有理数指数。例如，假设 $x, y > 0$，我们可以进行以下计算：

$$\frac{x^{\frac{3}{2}} y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{3}{2}-(-\frac{1}{2})} y^{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = x^2 y^{-1} = \frac{x^2}{y}.$$

类似地，

$$\frac{(2x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3}})^3}{4x^{-\frac{1}{2}} y} = \frac{8x^{\frac{3}{2}} y^2}{4x^{-\frac{1}{2}} y} = 2x^2 y.$$

根据指数法则，对于任意非负数 a，我们应该有：

$$(a^{1/2})^2 = a^{(1/2)\cdot 2} = a,$$

这意味着 $a^{1/2}$ 应该是一个平方等于 a 的数。换句话说，$a^{\frac{1}{2}}$ 应该等于平方根 $\sqrt{a}$。当 $a \geq 0$ 时，我们将 $a^{1/2}$ 定义为 a 的非负平方根：

$$a^{1/2} = \sqrt{a}.$$

按照完全相同的思路，$a^{1/3}$ 是一个立方等于 a 的数，因此 $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$。我们可以将其一般化如下。

有理数指数

对于 $a > 0$、正整数 n 和整数 m，我们定义

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

按照这种理解，我们可以将平方根或立方根等根式看作指数表达式，并对它们应用之前讨论的相同法则。因此，我们可以轻松地处理包含根式的表达式。作为第一个例子，考虑 $\sqrt{12x^2y^3}$。假设 $x, y > 0$，我们可以将根号内的表达式分解成一个完全平方的部分和剩余的部分：

$$\sqrt{12x^2y^3} = \sqrt{4x^2y^2 \cdot 3y} = \sqrt{4x^2y^2}\sqrt{3y} = 2xy\sqrt{3y}.$$

分解出一个能够开平方的部分　　使用 $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$　　使用 $\sqrt{a^2} = a$

1.5 无理数指数

现在，我们将进一步扩展之前的想法，考虑以无理数为指数的情况。为了说明这个想法，我们将回答以下问题：

2^{π} 是什么？

乍一看，这似乎很荒谬。我们知道，2^3 表示将 2 与自身相乘3次，而 2^4 表示将 2 与自身相乘4次。那么，将 2 与自身相乘 π 次是什么意思呢？我们不必进行太多哲学上的讨论，只需承认这种解释并不正确。相反，我们将采用一种完全不同的方法来构造 2^π。

首先回顾一下，π 是一个无理数，它具有无限不循环的小数展开 $\pi = 3.1415...$。这个表达式中的每一位数字都是有理数：

$$\begin{aligned}\pi &= 3.1415\ldots \\ &= 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 + 0.0005 + \cdots \\ &= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \cdots .\end{aligned}$$

由于这些小数部分都是有理数，因此我们已经知道将 2 提升到这些指数次方是什么意思。所以，我们可以通过构造越来越精确的近似值，逐渐接近所需的数 2^π：

$$\begin{aligned}2^3 &= 8, \\ 2^{3.1} &= 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{10}} \approx 8.57419, \\ 2^{3.14} &= 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{10}} \cdot 2^{\frac{4}{100}} \approx 8.81524, \\ 2^{3.141} &= 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{10}} \cdot 2^{\frac{4}{100}} \cdot 2^{\frac{1}{1000}} \approx 8.82135.\end{aligned}$$

粗略地说，如果我们继续这个过程，就会不断乘上以越来越小的数为指数的 2 的幂。随着我们进一步考虑 π 的小数位，这些小数部分会越来越接近 0，这意味着 2^a 会越来越接近 1。因此，当我们将这些因子加入近似计算时，它们对结果的影响会越来越小。在这种情况下，我们的近似值会逐渐趋近于一个特定的数。这个数大约是：

$$2^\pi \approx 8.8249778$$

实际上，这个值是很合理的：因为 $3 < \pi < 4$，所以 2^π 的值位于 $2^3 = 8$ 和 $2^4 = 16$ 之间。

这种通过有理数逐渐逼近无理数指数的方法，被称为一种极限思想。我们将在第13讲中详细研究这个概念。

1.6 指数函数的图像

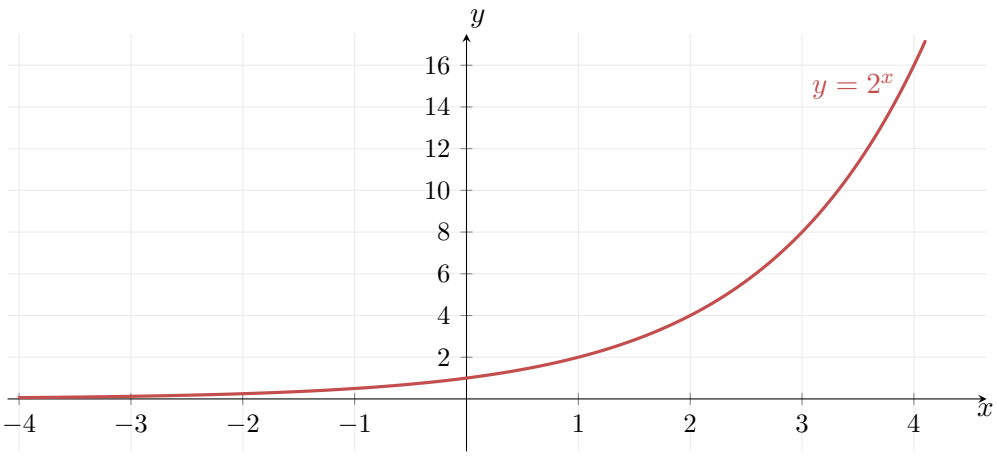
在前面的几个小节中，我们已经说明，指数可以定义在自然数、整数、有理数，甚至无理数上。因此，如果对于 $\mathbb{R}$ 中的任意数 a，我们都能够理解 2^a 的含义，那么就可以有意义地定义一个真正的函数：

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{其中} \qquad f(x) = 2^x.$$

这个函数接受任意实数作为输入，然后计算 2 的该数次方。例如，

$$f(3) = 2^3 = 8, \qquad f\left(\frac{1}{4}\right) = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \qquad \text{以及} \qquad f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

这个函数的图像如下所示。

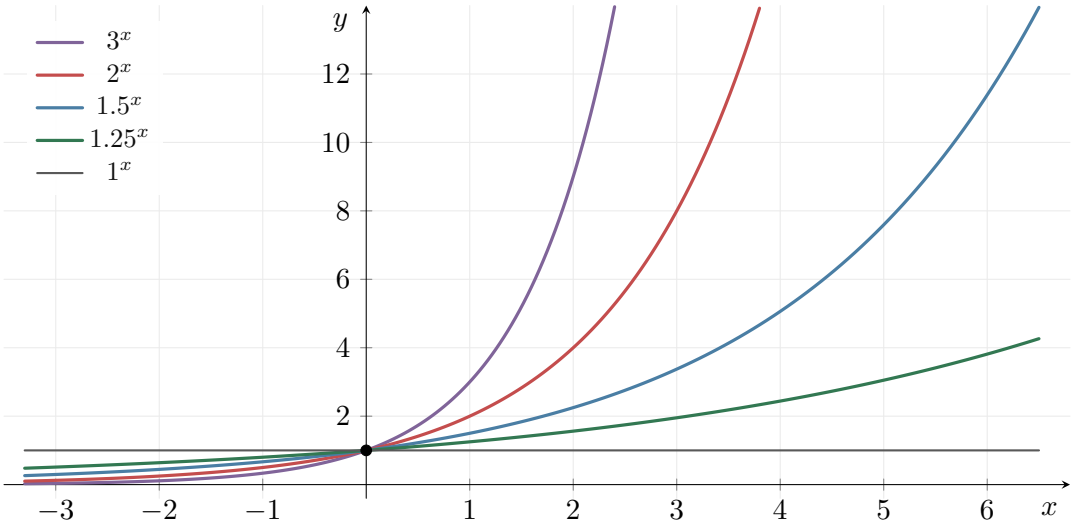


正如你所看到的，图像表现出两个主要特征。首先，在左侧，图像越来越接近零。这是因为指数变得越来越负时，所得到的数会越来越小：

$$\text{如果 } m < n\text{，那么} \qquad 2^{-n} = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m} = 2^{-m}.$$

然而，图像永远不会真正达到零，否则就意味着 $2^{-n} = 0$，这是不可能的。[1] 另一方面，随着指数不断增大，图像右侧的值可以变得任意大，因为每当指数从 n 增加到 $n+1$，即从 2^n 变为 2^{n+1} 时，图像的高度都会翻倍。

一般来说，如果 $b > 0$，我们可以定义一个指数函数 $y = b^x$。下面的图像展示了实数 x 对应的几个例子：



所有这些图像都在 $y = 1$ 的位置与 y 轴相交，因为对于任意正底数 b，都有 $b^0 = 1$。

[1] 具体来说，如果 $2^{-n} = 0$，那么 $\frac{1}{2^n} = 0$。将等式两边同时乘以 2^n，得到：

$$2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 2^n \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 0,$$

这显然是不可能的。

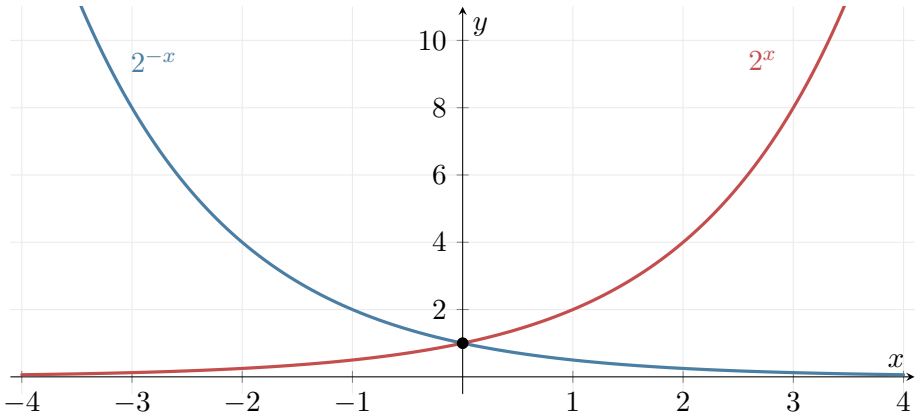
现在考虑一个小于 1 的底数 b，例如 $b = \frac{1}{2}$。此时，指数函数的形式为：

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

这意味着每当 x 增加 1，函数的输出就除以 2。因此，随着 x 增大，输出会不断减小。根据指数法则

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x},$$

我们可以看出，$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像就是将 $y = 2^x$ 的图像关于 y 轴对称得到的：



指数增长与指数衰减

对于正底数 b，函数 $y = b^x$ 具有以下性质：

- 如果 $b > 1$，那么 $y = b^x$ 表示指数增长；
- 如果 $0 < b < 1$，那么 $y = b^x$ 表示指数衰减；
- 如果 $b = 1$，那么 $y = 1$ 是一个常数函数。

1.7 更多例子

现在，我们回到一些稍微复杂的指数运算。首先，考虑如何化简包含不同底数的多个指数表达式。例如，假设我们有：

$$2^{2x}4^x.$$

为了化简这个表达式，我们首先注意到 4 恰好等于 2^2。因此，可以先用 2^2 代替 4，然后使用指数法则来简化整个表达式：

$$2^{2x}4^x = 2^{2x}(2^2)^x = 2^{2x}2^{2x} = 2^{4x} = (2^4)^x = 16^x.$$

类似地，底数 3 和 9 也有联系，因为 $9 = 3^2$。因此：

$$3^{x^2}9^x = 3^{x^2}(3^2)^x = 3^{x^2+2x} = 3^{x(x+2)}.$$

这里的基本策略仍然是先尝试将所有项改写成具有相同底数的形式，然后再利用熟悉的指数法则进行化简。

接下来，我们考虑这样的表达式：

$$3^{\sin^2(\theta)} \cdot 3^{\cos^2(\theta)}.$$

为了化简它，我们可以使用第7讲学过的三角函数勾股恒等式：

$$3^{\sin^2(\theta)} \cdot 3^{\cos^2(\theta)} = 3^{\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)} = 3^1 = 3.$$

再看另一个例子。这次我们使用恒等式 $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$ 进行化简：[2]

$$\begin{aligned}\frac{3^{1+\tan^2(\theta)}}{3^{\sec^2(\theta)-1}} &= 3^{1+\tan^2(\theta)-(\sec^2(\theta)-1)} \\ &= 3^{1+\tan^2(\theta)-\tan^2(\theta)} = 3.\end{aligned}$$

原则上，我们可以将这种思路与前面的方法结合起来，化简一些看起来非常复杂的表达式，例如：

$$\begin{aligned}2^{2\sin^2(\theta)} \cdot 4^{\cos^2(\theta)} &= 2^{2\sin^2(\theta)} \cdot 2^{2\cos^2(\theta)} \\ &= 2^{2(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))} = 2^2 = 4.\end{aligned}$$

2 数 e 的定义

到目前为止，我们一直在研究指数的一般概念。现在，我们将介绍一个非常特殊的数，它不仅广泛应用于数学，也应用于数学之外的许多领域。为了找到这个特殊的数，我们首先需要稍微绕个弯，了解一些金融学的基本知识。

现在，我们将介绍一个在研究指数增长时自然出现的数。有趣的是，这个数也将成为微积分中的核心对象之一。为了找到它，我们将考虑一个非常熟悉的增长应用：货币所产生的利息。

2.1 单利与复利

假设我们在银行存入初始金额 P，银行按年利率 r 支付利息。在最简单的模型中，利息始终根据最初存入的金额计算。例如，如果我们以 10% 的年利率投资 1000 美元，那么银行每年将支付 100 美元的利息。这意味着我们的资金每年都会增加相同的金额。因此，经过 t 年后，总金额为

$$A = 1000 + 100t = 1000(1 + 0.1t).$$

更一般地，我们得到熟悉的单利公式。

单利

如果 P 是初始投资金额，r 是以小数形式表示的利率，t 是以年为单位的时间，那么按照单利计算得到的累计金额 A 可以使用以下公式计算：

$$A = P(1 + rt).$$

例如，初始投资 1000 美元，采用 10% 的单利利率，那么五年后的金额为

$$A = 1000(1 + 0.1 \cdot 5) = 1000(1.5) = 1500.$$

[2]请注意，最后的三角函数表达式只有在 $\tan(\theta)$ 和 $\sec(\theta)$ 有定义时才有意义。也就是说，整个计算仅在 θ 不是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍时成立。

事实上，现实世界中的许多利息计算并不遵循单利公式。更常见的情况是，银行将产生的利息存回同一个账户，使这些额外收入也成为下一年的本金的一部分。再过一年，新的利息又会根据之前赚取的利息来计算，如此反复。这种方法称为复利，因为每次计算利息时，都会将本金和此前已经赚取的利息合并计算。

我们可以通过反复应用单利公式来推导复利公式。为此，假设初始投资为 P_0，年利率为 r。一年后，新的金额为

$$P_1 = P_0(1 + r).$$

为了计算再过一年后赚取的复利，我们第二次应用单利公式，但这次使用新的余额 P_1，而不是最初的 P_0。经过简单整理，得到：

$$P_2 = P_1(1 + r) = P_0(1 + r)(1 + r) = P_0(1 + r)^2.$$

如果继续这个过程，再过一年，我们会得到：

$$P_3 = P_2(1 + r) = P_0(1 + r)^3,$$

同样的推导适用于任意年数。一般而言，这个过程会产生一个关于时间的指数函数公式，而不是线性公式。结果就是下面的复利公式。

复利

如果初始投资 P 按年利率 r 获得复利，并且每年复利计算一次，那么经过 t 个完整年度后的金额为

$$A = P(1 + r)^t.$$

对于整数值的 t，这个公式可以直接通过重复乘以 $1 + r$ 得到。

举例来说，假设我们以 10% 的年利率存入 1000 美元。两年后，我们有

$$A = 1000(1.1)^2 = 1000 \cdot 1.21 = 1210.$$

经过五年的复利计算后，新的账户余额将为

$$1000(1.1)^5 \approx 1611,$$

这比使用单利得到的 1500 美元更多。

2.2 更频繁地计算复利

到目前为止，我们一直假设利息每年累计一次。现在假设银行决定每年支付两次利息，而不是一次。那么，我们应该如何计算一年后的总利息呢？首先注意，如果 r 是年利率，那么半年后产生的利息就是全年利息的一半。这意味着六个月后，我们的本金将乘以：

$$1 + \frac{r}{2}.$$

一年之后，我们已经进行了两次这样的复利计算，因此总的乘数为：

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2.$$

如果将这个过程持续 t 年，那么累计金额的一般公式就变成：

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

我们可以将同样的推导推广到一年被划分成更多时间段的情况。下面的公式描述了每年计算 n 次复利、持续 t 年后得到的总余额。

不同复利计算频率

设 P 为本金，r 为年利率，t 为以年为单位的时间。如果每年计算 n 次复利，那么在经过整数个复利计算周期后，累计金额可以使用以下公式计算：

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

2.3 指数常数

为了简单起见，我们考虑前面公式中的一种特殊情况：投资 1 美元，年利率为 100%，投资期限为一年。换句话说，我们令 $P = 1, r = 1, t = 1$。如果每年只计算一次利息，那么累计金额 A 恰好是 2 美元，即最初的 1 美元，加上按 100% 的年利率赚取的额外 1 美元。

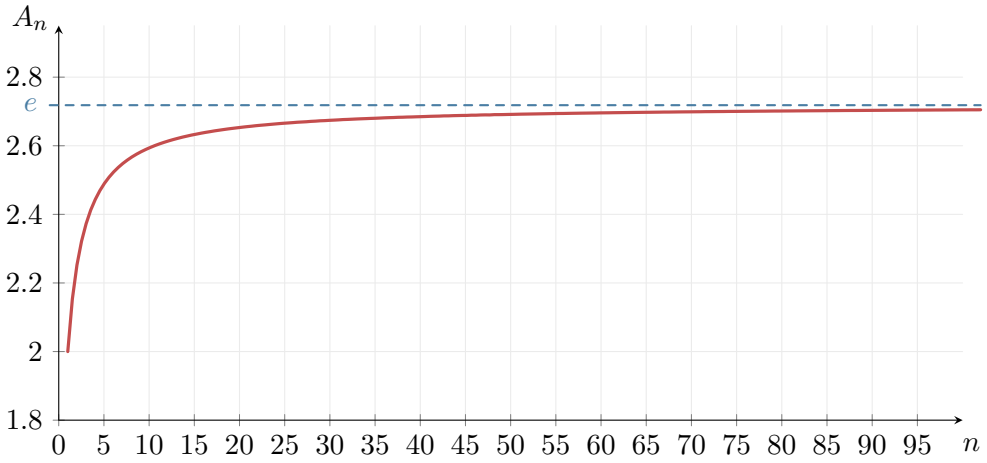
如果银行计算复利的频率越来越高，会发生什么呢？在这个特别简单的设定中，公式简化为：

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}.$$

现在，我们将不同的 n 值代入公式，看看会发生什么：

计算频率	支付次数 n	金额 A_n
每年一次	1	2
每半年一次	2	2.25
每月一次	12	2.61304
每周一次	52	2.69260
每天一次	365	2.71457
每小时一次	8760	2.718126692
每分钟一次	525600	2.718279243
⋮	⋮	⋮

看起来，增大 n 并不会让我们的钱无限增长。相反，这些数值似乎逐渐趋近于某个特定的数。事实上，我们已经找到了那个特殊的数：e。我们可以通过下面的图像来理解它：



随着 n 增大，红色曲线越来越接近蓝色虚线。这条虚线的高度就是 e 的值，大约为 $2.71828\ldots$。

数 e

指数常数 e 被定义为表达式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

在 n 越来越大时所趋近的数值。

正如我们在研究圆的几何性质时自然地遇到了 π 一样，当我们研究复利计算频率不断增加时，数 e 也会自然出现。这两个数都是无理数，而且我们将在第12讲中看到它们之间的联系。

2.4 关于 e 的代数运算

我们通过一段相当长的复利讨论引入了 e。但我们应该记住，e 只是一个正实数，其值大约为 2.7。因此，e 与其他所有正实数一样，满足完全相同的指数法则：

$$e^0 = 1, \qquad e^x e^y = e^{x+y}, \qquad (e^x)^y = e^{xy}.$$

例如，让我们化简以下表达式：

$$\frac{e^{3x}\cdot e^{2-x}}{e^{x+1}} = \frac{e^{2x+2}}{e^{x+1}} = e^{2x+2-(x+1)} = e^{x+1}.$$

再看另一个例子：

$$\frac{(e^{\frac{x}{2}})^4}{e^{-x}} = \frac{e^{2x}}{e^{-x}} = e^{2x-(-x)} = e^{3x}.$$

最后，回顾第7讲中的恒等式 $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$。利用这个恒等式，我们可以得到另一个涉及之前学过的三角函数的例子：

$$\begin{aligned} e^{2\sin^2(\theta)}\cdot e^{\cos(2\theta)} &= e^{2\sin^2(\theta)+\cos(2\theta)} \\ &= e^{2\sin^2(\theta)+1-2\sin^2(\theta)} = e. \end{aligned}$$