MAT162 第9講：指数関数

Contents

1 指数の計算法則 **2**

1.1 掛け算と累乗 2

1.2 ゼロ乗と負の指数 2

1.3 変数の指数 3

1.4 有理数の指数 4

1.5 無理数の指数 5

1.6 指数関数のグラフ 5

1.7 さらにいくつかの例 8

2 数 e の定義 **9**

2.1 単利と複利 9

2.2 複利計算の頻度を増やす 10

2.3 指数の数 11

2.4 e を使った計算 12

最初の8回の講義では、実数直線、直線、ベクトル、円、三角関数について学びました。ここからは、もう一つの重要な関数のグループである、いわゆる指数関数について学びます。まず指数の計算法則を復習し、自然数に対して成り立つおなじみの法則を整数、さらに有理数、そして無理数へと拡張します。次に、指数関数のグラフを調べ、指数関数がどのように増加や減少を表し、複利のような現象のモデルとして利用できるかを見ていきます。最後に、複利の公式を使って、e と呼ばれる特別な数を導入します。第10講で見るように、この数にはいくつかの驚くべき性質があり、これから学ぶ微積分への手がかりとなります。

1　指数の計算法則

1.1　掛け算と累乗

自然数による掛け算は、同じ数を繰り返し足すことを簡単に表したものでした。例えば、ある数 a を何度も足し合わせることを考えます。これを n 回行うと、その結果は次のようになります。

$$na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{ 回}}.$$

同様に、ある数 a を繰り返し掛け合わせると、次のようになります。

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{ 回}}.$$

ここで、数 a は通常底と呼ばれ、数 n は指数と呼ばれます。掛け算を繰り返しの足し算と考えられるのと同じように、累乗を繰り返しの掛け算と考えることができます。

ここからは、指数を含む代数式を計算するためのいくつかの法則を紹介します。以下に基本的な法則をまとめます。

指数法則

正の整数 m, n と、0 でない実数 a, b に対して、次が成り立ちます。

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$
$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n.$$

これらの法則はすべて、0 や負の指数を定義すれば、指数の定義から直接導くことができます。例えば、最初の法則 $a^m a^n = a^{m+n}$ は、a^m と a^n の定義を書き出し、それらを掛け合わせることで導けます。

$$a^m a^n = \underbrace{(a \cdots a)}_{m\text{ 回}} \underbrace{(a \cdots a)}_{n\text{ 回}} = \underbrace{a \cdots a \cdot a \cdots a}_{(m+n)\text{ 回}} = a^{m+n}.$$

他の法則も同じように導くことができます。どのように導けるか、自分で考えてみるとよい練習になります。

1.2　ゼロ乗と負の指数

一見すると、a^0 という式は少し不思議に思えます。ある数をそれ自身で*0*回掛けるとは、一体どういう意味でしょうか？これを考えるために、法則 $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ を使ってみましょう。$m = n$ とすると、次のようになります。

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m}$$

この分数の分母と分子は同じなので、約分すると $a^0 = 1$ が得られます。

同様の考え方を使って、負の指数についても考えることができます。例えば、a^{-1} を考えてみましょう。この数は a の乗法逆元であってほしいので、a と掛け合わせると 1 になるはずです。

したがって、次のようになります。

$$1 = a \cdot a^{-1} \quad \Longrightarrow \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

さらに一般的に、より大きな負の指数についても法則を導くことができます。

$$1 = a \cdot a^{-1} \quad \Longrightarrow \quad 1^m = (a \cdot a^{-1})^m \quad \Longrightarrow \quad 1 = a^m \cdot (a^{-1})^m \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

ゼロ乗と負の指数

0 でない任意の実数 a と正の整数 m に対して、

$$a^0 = 1, \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}, \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

これらの法則を使うと、一見複雑に見える式を簡単にすることができます。例えば、次の式を考えてみましょう。

$$\frac{2^5 \cdot 2^{-3}}{2^4}.$$

指数法則を一つずつ適用することで、この式を簡単にできます。方法はいくつもありますが、その一例を示します。

$$\frac{2^5 \cdot 2^{-3}}{2^4} = \frac{2^5}{2^4 \cdot 2^3} = \frac{2^5}{2^7} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ を使用　　$a^m a^n = a^{m+n}$ を使用　　$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ を使用

他にも、次のような計算例があります。

$$\frac{(3^2)^4}{3^5} = \frac{3^8}{3^5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27,$$

$$\left(\frac{2a^3}{b^2}\right)^2 = \frac{2^2 a^6}{b^4} = \frac{4a^6}{b^4}.$$

最後の式では、$b \neq 0$ と仮定していることに注意してください。そうでなければ、0 で割ることになってしまいます。

1.3　変数の指数

第1講では、数の代わりをする x や y のような変数について簡単に学びました。これまで扱ってきた数に対して指数法則が成り立つので、式が正しく定義されている限り、変数に対してもまったく同じ法則を使うことができます。例えば、次のような式を考えます。

$$\frac{x^5 y^{-2}}{x^{-3} y^4}$$

これまでと同じ法則を使うと、次のように計算できます。

$$\frac{x^5y^{-2}}{x^{-3}y^4} = x^{5-(-3)}y^{-2-4} = x^8y^{-6} = \frac{x^8}{y^6},$$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ を使用　　指数を計算する　　$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ を使用

ただし、ここでは $x, y \neq 0$ と仮定しています。この仮定は必要です。もし x または y が 0 であれば、元の式に 0 による割り算が現れるため、式が定義されないからです。

1.4 有理数の指数

指数法則を有理数にまで拡張することもできます。例えば、$x, y > 0$ と仮定すると、次のように計算できます。

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}y^{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = x^2y^{-1} = \frac{x^2}{y}.$$

同様に、

$$\frac{(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}})^3}{4x^{-\frac{1}{2}}y} = \frac{8x^{\frac{3}{2}}y^2}{4x^{-\frac{1}{2}}y} = 2x^2y.$$

指数法則によれば、任意の負でない数 a に対して、次の関係が成り立つはずです。

$$(a^{1/2})^2 = a^{(1/2)\cdot 2} = a,$$

つまり、$a^{1/2}$ は、2乗すると a になる数であるはずです。言い換えると、$a^{\frac{1}{2}}$ は平方根 $\sqrt{a}$ に等しくなります。$a \geq 0$ のとき、$a^{1/2}$ を a の負でない平方根として定義します。

$$a^{1/2} = \sqrt{a}.$$

まったく同じ考え方で、$a^{1/3}$ は3乗すると a になる数なので、$a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$ となります。これを次のように一般化できます。

有理数の指数

$a > 0$、正の整数 n、整数 m に対して、次のように定義します。

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

この考え方に従うと、平方根や立方根のような根号を、これまで学んだ指数法則に従う指数として解釈できます。その結果、根号を含む式も簡単に計算できるようになります。最初の例として、$\sqrt{12x^2y^3}$ を考えましょう。$x, y > 0$ と仮定すると、根号の中を完全平方数を含む部分と残りの部分に分けることができます。

$$\sqrt{12x^2y^3} = \sqrt{4x^2y^2 \cdot 3y} = \sqrt{4x^2y^2}\sqrt{3y} = 2xy\sqrt{3y}.$$

平方根を外せる部分と残りの部分に分ける　　$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ を使用　　$\sqrt{a^2} = a$ を使用

1.5 無理数の指数

ここからは、無理数を指数とする場合を考え、さらに一歩進めてみましょう。この考え方を説明するために、次の問題に答えます。

2^π とは何でしょうか？

一見すると、これは奇妙に思えます。2^3 は 2 を3回掛け合わせた値を表し、2^4 は 2 を4回掛け合わせた値を表すことを知っています。では、2 を π 回掛け合わせるとは、どういう意味なのでしょうか？あまり哲学的にならずに考えると、この解釈は正しくないと認める必要があります。その代わりに、まったく別の方法で 2^π を構成します。

まず、π は無理数であり、$\pi = 3.1415...$ という終わりのない小数展開を持つことを思い出してください。この小数展開に現れる各桁の数字は有理数です。

$$\begin{aligned}\pi &= 3.1415\ldots \\ &= 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 + 0.0005 + \cdots \\ &= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \cdots .\end{aligned}$$

これらの小数の各部分は有理数なので、2 をそれぞれの数で累乗することが何を意味するかは、すでに分かっています。したがって、より良い近似値を次々と作ることで、求めたい数 2^π に近づくことができます。

$$\begin{aligned}2^3 &= 8, \\ 2^{3.1} &= 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{10}} \approx 8.57419, \\ 2^{3.14} &= 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{10}} \cdot 2^{\frac{4}{100}} \approx 8.81524, \\ 2^{3.141} &= 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{10}} \cdot 2^{\frac{4}{100}} \cdot 2^{\frac{1}{1000}} \approx 8.82135.\end{aligned}$$

大まかに言えば、この操作を続けると、2 をますます小さな数で累乗したものを掛け合わせ続けることになります。π の小数展開をさらに進めるにつれて、これらの小さな数は 0 にどんどん近づきます。つまり、2^a は 1 に近づいていきます。そのため、これらを近似値に加えても、結果への影響は次第に小さくなります。この場合、近似値はある特定の数に近づいていきます。その数はおよそ次の値です。

$$2^\pi \approx 8.8249778$$

実際、この値は十分に納得できます。$3 < \pi < 4$ なので、2^π の値は $2^3 = 8$ と $2^4 = 16$ の間にあるからです。

このように、有理数を使って無理数の指数に少しずつ近づく考え方は、極限を使った議論と呼ばれます。この考え方については第13講で詳しく学びます。

1.6 指数関数のグラフ

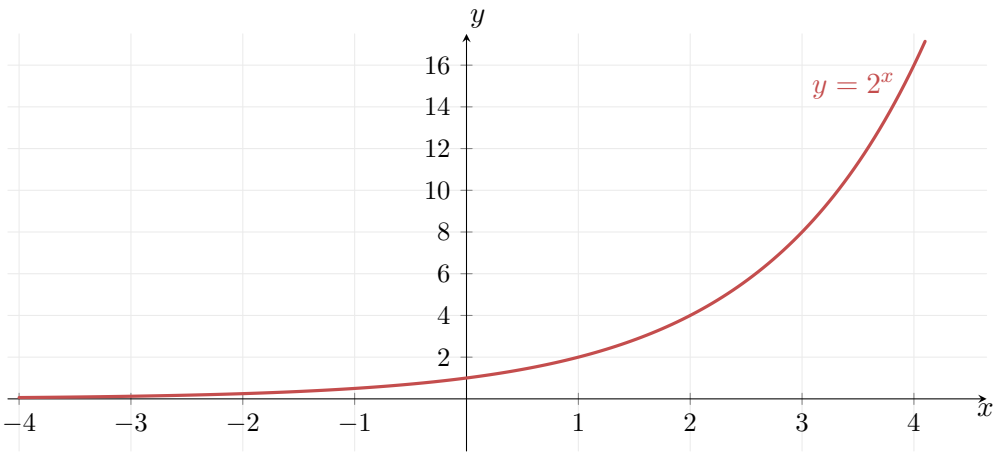
これまでのいくつかの節で、自然数、整数、有理数、さらには無理数に対しても指数を定義できることを示しました。したがって、$\mathbb{R}$ に属する任意の数 a に対して 2^a という量を理解できれば、次のような関数を意味のあるものとして書くことができます。

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{ただし} \qquad f(x) = 2^x.$$

この関数は、任意の実数を入力として受け取り、2 をその数で累乗します。例えば、

$$f(3) = 2^3 = 8, \qquad f\left(\frac{1}{4}\right) = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \qquad \text{および} \qquad f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

この関数のグラフを以下に示します。



このグラフには、大きく分けて二つの特徴があります。まず、左側ではグラフが 0 にどんどん近づいていきます。これは、指数がますます負の方向に大きくなると、値がますます小さくなるためです。

$$m < n \text{ ならば} \qquad 2^{-n} = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m} = 2^{-m}.$$

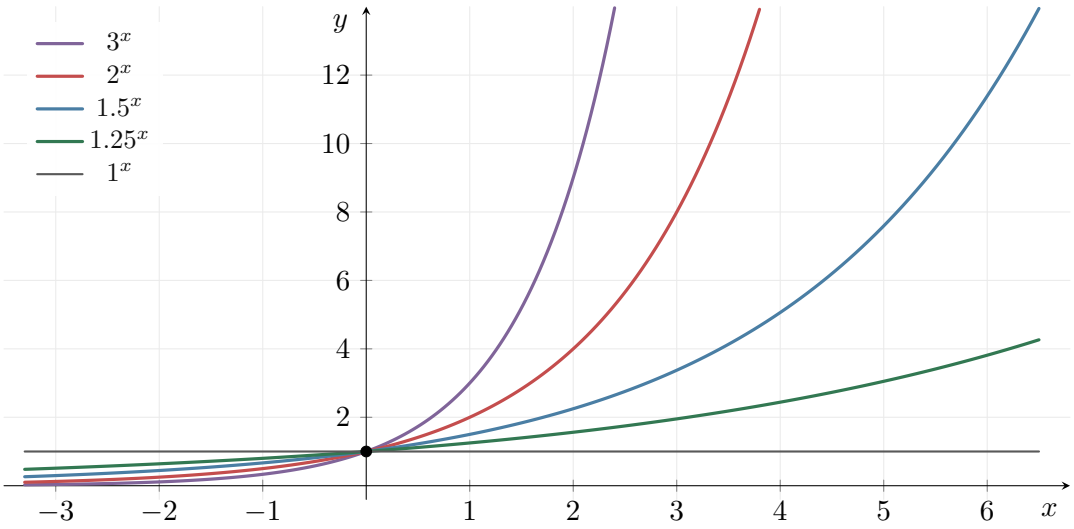
しかし、グラフが実際に 0 に達することはありません。もし達したとすれば、$2^{-n} = 0$ となりますが、これは不可能です。[1] 一方、グラフの右側では、指数を大きくするにつれて値がいくらでも大きくなります。これは、2^n から 2^{n+1} へ一段階進むたびに、高さが2倍になるためです。

一般に、$b > 0$ のとき、指数関数 $y = b^x$ を定義できます。以下のグラフには、実数 x に対するさまざまな例を示しています。

[1] 具体的には、もし $2^{-n} = 0$ であれば、$\frac{1}{2^n} = 0$ となります。両辺に 2^n を掛けると、

$$2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 2^n \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 0,$$

となりますが、これは不可能です。



これらのグラフはすべて、$y = 1$ の位置で y 軸と交わります。これは、すべての正の底 b に対して $b^0 = 1$ が成り立つためです。

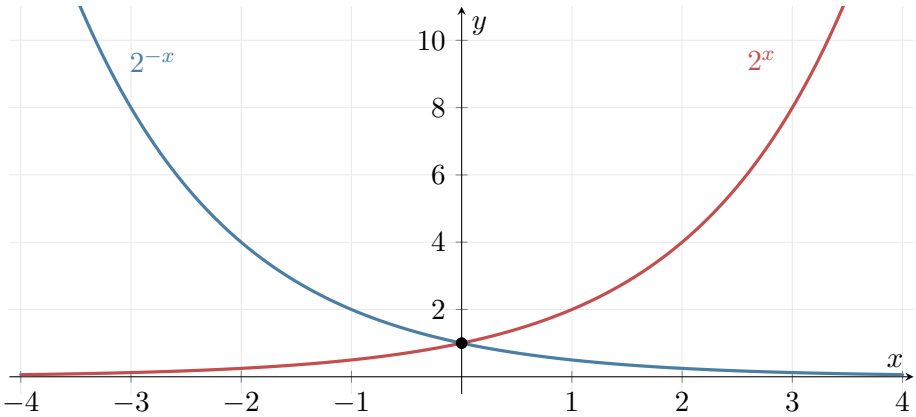
次に、1 より小さい底 b、例えば $b = \frac{1}{2}$ を考えてみましょう。この場合、指数関数は次の形になります。

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

つまり、x が 1 増えるたびに、出力は 2 で割られます。したがって、x が大きくなるにつれて出力は小さくなります。指数法則

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x},$$

から、$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは、$y = 2^x$ のグラフを y 軸に関して反転させたものになることが分かります。



指数関数的増加と減少

正の底 b に対して、関数 $y = b^x$ は次の性質を満たします。

- $b > 1$ のとき、$y = b^x$ は指数関数的増加を表します。
- $0 < b < 1$ のとき、$y = b^x$ は指数関数的減少を表します。
- $b = 1$ のとき、$y = 1$ は定数関数です。

1.7 さらにいくつかの例

ここで、もう少し複雑な指数の例に戻りましょう。まず、底が異なる複数の累乗を含む式の計算を考えます。例えば、次の式があるとします。

$$2^{2x}4^x.$$

これを簡単にするために、まず 4 が 2^2 に等しいことに注目します。そこで、4 を 2^2 に置き換えると、指数法則を使って式全体を簡単にできます。

$$2^{2x}4^x = 2^{2x}(2^2)^x = 2^{2x}2^{2x} = 2^{4x} = (2^4)^x = 16^x.$$

同様に、底 3 と 9 は、$9 = 3^2$ という関係にあります。したがって、

$$3^{x^2}9^x = 3^{x^2}(3^2)^x = 3^{x^2+2x} = 3^{x(x+2)}.$$

ここでも、まずすべてを共通の底を使って書き直し、その後でおなじみの指数法則を使って簡単にすることが基本的な方法です。

次の例として、以下の式を考えてみましょう。

$$3^{\sin^2(\theta)} \cdot 3^{\cos^2(\theta)}.$$

これを簡単にするために、第7講で学んだ三角関数のピタゴラスの恒等式を使います。

$$3^{\sin^2(\theta)} \cdot 3^{\cos^2(\theta)} = 3^{\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)} = 3^1 = 3.$$

別の例として、今度は恒等式 $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$ を使って次の式を簡単にします。[2]

$$\begin{aligned}\frac{3^{1+\tan^2(\theta)}}{3^{\sec^2(\theta)-1}} &= 3^{1+\tan^2(\theta)-(\sec^2(\theta)-1)} \\ &= 3^{1+\tan^2(\theta)-\tan^2(\theta)} = 3.\end{aligned}$$

原理的には、この考え方を先ほどの方法と組み合わせることで、次のような複雑に見える式も簡単にできます。

$$\begin{aligned}2^{2\sin^2(\theta)} \cdot 4^{\cos^2(\theta)} &= 2^{2\sin^2(\theta)} \cdot 2^{2\cos^2(\theta)} \\ &= 2^{2(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))} = 2^2 = 4.\end{aligned}$$

[2]最後の三角関数を含む式は、$\tan(\theta)$ と $\sec(\theta)$ が定義される場合にのみ意味を持ちます。つまり、計算全体は θ が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない場合にのみ成り立ちます。

2　数 e の定義

ここまでは指数の一般的な考え方について学んできました。ここからは、数学のさまざまな分野だけでなく、その外でも応用される、ある特別な数を紹介します。この数を見つけるために、まず金融の基本的な考え方について少し寄り道をします。

ここで紹介する数は、指数関数的な増加を考えると自然に現れます。興味深いことに、この数は微積分でも中心的な役割を果たします。この数を見つけるために、増加の身近な応用例である、お金に付く利息について考えてみましょう。

2.1　単利と複利

銀行に最初の金額 P を預け、銀行が年利 r で利息を支払うとします。最も単純なモデルでは、利息は常に最初に預けた金額に基づいて計算されます。例えば、1000 ドルを年利 10% で預けたとすると、銀行は毎年 100 ドルを支払います。つまり、お金は毎年同じ金額ずつ増えることになります。したがって、t 年後の合計金額は

$$A = 1000 + 100t = 1000(1 + 0.1t).$$

となります。より一般的には、よく知られた単利の公式が得られます。

単利

P を最初の投資額、r を小数で表した利率、t を年単位で測った時間とすると、単利によって積み立てられる金額 A は、次の公式で計算できます。

$$A = P(1 + rt).$$

例えば、1000 ドルを年利 10% の単利で預けた場合、5年後には

$$A = 1000(1 + 0.1 \cdot 5) = 1000(1.5) = 1500.$$

となります。実際には、現実世界の多くの利息計算は単利の公式には従いません。銀行が利息を同じ口座に加え、翌年にはその利息も元本に含めて計算することが一般的です。その次の年には、それまでに得た利息がさらに利息を生み、それが繰り返されます。この考え方は複利と呼ばれます。なぜなら、元本とすでに得られた利息を合わせた金額に基づいて、新しい利息が計算されるからです。

複利の公式は、単利の公式を繰り返し適用することで導くことができます。最初の投資額を P_0、年利を r としましょう。1年後の金額は

$$P_1 = P_0(1 + r).$$

となります。さらに1年後の複利を計算するには、単利の公式をもう一度適用します。ただし、今度は P_0 ではなく、新しい残高 P_1 から始めます。式を整理すると、

$$P_2 = P_1(1 + r) = P_0(1 + r)(1 + r) = P_0(1 + r)^2.$$

となります。さらにもう1年続けると、

$$P_3 = P_2(1 + r) = P_0(1 + r)^3,$$

となり、同じ考え方は何年についても成り立ちます。一般に、この操作によって、時間に対して線形ではなく指数関数的な公式が得られます。その結果が、次の複利の公式です。

複利

最初の投資額 P が年利 r で複利を生み、年に1回複利計算される場合、t 年後（t は整数）の金額は

$$A = P(1+r)^t.$$

となります。t が整数の場合、これは $1+r$ を繰り返し掛けることから直接導かれます。

例として、1000 ドルを年利 10% で預けたとします。2年後には、

$$A = 1000(1.1)^2 = 1000 \cdot 1.21 = 1210.$$

となります。複利で5年間運用すると、新しい残高は

$$1000(1.1)^5 \approx 1611,$$

となり、単利の場合の 1500 ドルよりも大きくなります。

2.2 複利計算の頻度を増やす

ここまでは、利息が年に1回加算されると仮定してきました。では、銀行が年に1回ではなく、年に2回利息を加算するとしたらどうなるでしょうか？1年後の合計利息はどのように計算すればよいでしょうか？まず、r が年利であれば、半年後の利息はその半分になります。つまり、6か月後には元本に次の数を掛けることになります。

$$1 + \frac{r}{2}.$$

1年後には、この複利計算が2回行われているので、全体の倍率は次のようになります。

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2.$$

この操作を t 年間繰り返すと、積み立てられる金額の一般公式は次のようになります。

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

この考え方は、1年をさらに細かく分割する場合にも使えます。次の公式は、年に n 回複利計算を行い、それを t 年間続けた場合の合計残高を表します。

複利計算の頻度が異なる場合

P を元本、r を年利、t を年単位の時間とします。利息が年に n 回複利計算される場合、複利計算の回数が整数であれば、積み立てられる金額は次の公式で計算できます。

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

2.3 指数の数

簡単にするために、先ほどの公式で、1 ドルを年利 100% で投資し、1年間待つ場合を考えましょう。つまり、$P = 1, r = 1, t = 1$ とします。利息が年に1回加算される場合、積み立てられる金額 A はちょうど 2 ドルになります。これは最初の 1 ドルに、年利 100% で得たもう 1 ドルを加えたものです。

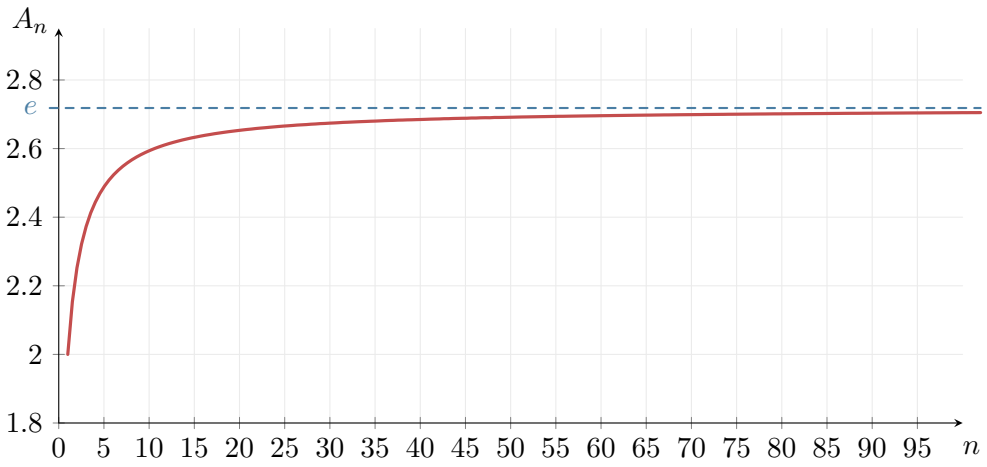
では、銀行が利息をますます頻繁に複利計算すると、どうなるでしょうか？この簡単な設定では、公式は次のようになります。

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

ここで、n にさまざまな値を代入して、何が起こるか見てみましょう。

頻度	**支払い回数** n	**金額** A_n
年に1回	1	2
半年ごと	2	2.25
毎月	12	2.61304
毎週	52	2.69260
毎日	365	2.71457
毎時間	8760	2.718126692
毎分	525600	2.718279243
⋮	⋮	⋮

n を大きくしても、お金が無限に増えるわけではなく、値はある数に近づいていくように見えます。実は、ここで特別な数 e にたどり着きました。これをグラフで表すと、次のようになります。



n が大きくなるにつれて、赤い曲線は青い破線にどんどん近づいていきます。この直線の高さが e の値であり、およそ 2.71828... です。

数 e

指数の数 e は、式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

が、n をどんどん大きくしたときに近づく値として定義されます。

円の幾何学を学んだときに π が自然に現れたのと同じように、複利計算の頻度をますます高くしていくと、数 e が自然に現れます。どちらも無理数であり、第12講では、この二つの数が互いに関係していることを学びます。

2.4 e を使った計算

ここまで、複利についてかなり長い説明を通して e を導入しました。しかし、e は約 2.7 に等しい、単なる正の実数であることを忘れないでください。したがって、e も他のすべての正の実数とまったく同じ指数法則に従います。

$$e^0 = 1, \qquad e^x e^y = e^{x+y}, \qquad (e^x)^y = e^{xy}.$$

例として、次の式を簡単にしてみましょう。

$$\frac{e^{3x}\cdot e^{2-x}}{e^{x+1}} = \frac{e^{2x+2}}{e^{x+1}} = e^{2x+2-(x+1)} = e^{x+1}.$$

別の例として、次の式を考えます。

$$\frac{(e^{\frac{x}{2}})^4}{e^{-x}} = \frac{e^{2x}}{e^{-x}} = e^{2x-(-x)} = e^{3x}.$$

最後に、第7講で学んだ $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ を思い出してください。これを使うと、以前に学んだ三角関数を含む、もう一つの例が得られます。

$$\begin{aligned} e^{2\sin^2(\theta)}\cdot e^{\cos(2\theta)} &= e^{2\sin^2(\theta)+\cos(2\theta)} \\ &= e^{2\sin^2(\theta)+1-2\sin^2(\theta)} = e. \end{aligned}$$